Fonctions de Lyapounov et stabilité des systèmes déterministes

R. Chabour

INRIA-Lorraine (Projet CONGE)
Département de Mathématiques
Université de Metz

1 Introduction

La notion de stabilité correspond à l'idée d'un comportement qui dure dans le temps et permet de formaliser la question suivante : supposons que l'on initialise le système dynamique

$$\dot{x} = f(x)$$

en un point voisin d'un point d'équilibre x_0 ; qu'advient-il de la trajectoire solution ? On sait que si le système est initialisé en x_0 il reste immobile. On dira que le point d'équilibre est stable si la trajectoire issue d'un point suffisamment voisin ne s'en éloigne pas trop et on dira qu'il est asymptotiquement stable si de plus la trajectoire s'approche indéfiniment de x_0. Cette question est d'importance car dans la pratique les conditions initiales présentent des incertitudes ; il serait souhaitable que deux conditions initiales voisines conduisent à des trajectoires solutions voisines pour tout temps et ceci même pour des temps infiniment longs. La solution d'une équation différentielle étant continue par rapport aux conditions initiales il en résulte que pour une durée T donnée on peut initialiser suffisamment près de x_0 afin que la trajectoire reste proche de x_0 mais pour T qui tend vers l'infini la continuité ne permet pas de répondre à la question. Une manière naturelle d'aborder cette question consisterait à résoudre l'équation différentielle et à examiner le comportement des solutions. Cependant en général on ne sait pas résoudre les équations différentielles. En effet intégrer une équation différentielle c'est exprimer, au moyen de fonctions connues, la solution la plus générale du système ; cela est rarement possible et l'on doit plutôt considérer les équations différentielles comme un moyen puissant de construction de fonctions nouvelles. Tel est le cas des fonctions de Bessel solutions de l'équation du second ordre.

$$t^2\,\ddot{y} + t\,\dot{y} + (t^2 - \lambda^2)\,y = 0$$

La réponse à la question nécessite donc une description qualitative des trajectoires du système. C'est le mathématicien Russe Lyapounov qui a établi en 1892 dans son mémoire intitulé *Problème général de la stabilité du mouvement*, les fondements de la théorie moderne de la stabilité. Les démonstrations utilisent des fonctions auxilliaires appellées aujourd'hui fonctions de Lyapounov.

2 Systèmes autonomes

2.1 Stabilité au sens de Lyapounov

On considère un système décrit par l'équation différentielle autonome :

$$\dot{x} = F(x) \tag{1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

On suppose que pour toute condition initiale x_0, il existe une unique solution définie sur $\mathbb{R}$ au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Nous noterons indifféremment $x(t, x_0)$ ou $x(t)$ cette solution.
L'ensemble des points sur la courbe solution lorsque t parcour $\mathbb{R}$, noté $\gamma(x_0)$ est appelé trajectoire.
On note $\gamma^+(x_0) = \{x(t, x_0),\ t \geq 0\}$ et $\gamma^-(x_0) = \{x(t, x_0),\ t \leq 0\}$

Définition 1 *On dit que $x_e \in \mathbb{R}^n$ est un point d'équilibre ou point singulier du système (1) si $F(x_e) = 0$.*

$x(t, x_e)$ est l'unique solution du problème de Cauchy associé. C'est à dire qu'un point d'équilibre constitue par lui même une trajectoire. Si on suppose l'unicité de la solution du problème de Cauchy les trajectoires ne peuvent pas s'auto intersecter et par conséquent un point d'équilibre ne peut être atteint que de manière asymptotique.

Définition 2 *On dit que x_e est un point d'équilibre stable si*
$\forall \epsilon > 0,\ \exists\ \delta\ (\epsilon) > 0$ *tel que* $\|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \forall t \geq 0\ \|x(t, x_0) - x_e\| < \epsilon$.

Définition 3 *: On dit que x_e est attractif pour le système (1) s'il existe un voisinage U de x_e tel que $\forall x_0 \in U\ \lim\limits_{t \to +\infty} x(t, x_0) = x_e$.*
Si de plus $U = \mathbb{R}^n$ on dit alors que x_e est globalement attractif.

On a longtemps cru que l'attractivité entraînait la stabilité. Si cette affirmation est vraie pour les systèmes linéaires elle est fausse de manière générale. On peut imaginer un système pour lequel il est impossible de confiner les trajectoires dans un voisinage de l'origine lorsque le temps tend vers l'infini comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1 (Vinograd 1957)

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x^2(y - x) + y^5}{(x^2 + y^2)(1 + (x^2 + y^2)^2)} \\ \dot{y} = \dfrac{y^2(y - 2x)}{(x^2 + y^2)(1 + (x^2 + y^2)^2)} \end{cases}$$

Définition 4 *: On dit que x_e est un point d'équilibre asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.*

Définition 5 *On dit que x_e est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable s'il est stable et globalement attractif.*

2.2 Fonctions de Lyapounov

La notion de fonction de Lyapounov constitue d'une certaine manière une généralisation de l'énergie. Étant donnée une fonction définie positive l'idée directrice des théorèmes de Lyapounov consiste à évaluer l'évolution de cette fonction sur les trajectoires du système afin de conclure à la décroissance de l'énergie.

Illustrons son origine mécanique par l'étude de l'équilibre de l'oscillateur harmonique avec frottement visqueux.

Si $d(\dot{x})$ représente le frottement visqueux, supposé être une fonction impaire de la vitesse $\dot{x}$, alors le principe fondamental de la dynamique fournit

$$m\ddot{x} = -kx - d(\dot{x})$$

Posons $z_1 = x$ et $z_2 = \dot{x}$ on obtient

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -\frac{k}{m}z_1 - \frac{d}{m}z_2 \end{cases}$$

Ce système physique possède une énergie totale E, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.

$$E = \frac{1}{2}mz_2^2 + \frac{1}{2}kz_1^2 = V(z_1, z_2).$$

Étudions l'évolution de l'énergie au cours du temps. Si $(x(t), \dot{x}(t))$ est une solution alors :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\ \dot{x}^2(t) + \frac{1}{2}k\ x^2(t)) = m\ \dot{x}(t)\ \ddot{x}(t) + k\ \dot{x}(t)\ x(t) = -\dot{x}(t)\ d(\dot{x}(t)) \leq 0.$$

Car d est une fonction impaire. On observe donc que l'énergie décroît le long des trajectoires du système.

Nous allons maintenant introduire la notion de dérivation d'une fonction le long des trajectoires du système.

On considère le système (1), pour simplifier l'écriture on supposera que l'origine est un point d'équilibre. Dans le cas contraire il suffit d'effectuer une translation.

Soit V une fonction dérivable $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \to V(x)$

On notera $\dot{V}$ la fonction définie par

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}\ V(x(t))|_{t=0} =< \frac{\partial V}{\partial x}, F(x) >$$

Définition 6 *La fonction V est dite*

1. *définie positive si $V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ dans un voisinage de 0 pour tout $x \neq 0$ dans ce voisinage.*
2. *définie négative si $-V$ est définie positive.*
3. *semi définie positive si $V(0) = 0$ et $V(x) \geq 0$ dans un voisinage de 0.*
4. *non définie si $V(0) = 0$ et $V(x)$ change de signe dans tout voisinage de l'origine.*

Exemple 2 $V(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^4$ est définie positive dans $\mathbb{R}^3$.
$V(x) = x_1^2 + (x_2 + x_3)^2$ est semi définie positive dans $\mathbb{R}^3$.
$V(x) = x_1^2 + x_2^2$ est définie positive dans $\mathbb{R}^2$ mais semi définie positive dans $\mathbb{R}^3$.
$V(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1^4 - x_2^4$ est définie positive à l'intérieur du cercle unité.

On note $\mathcal{K}$ la classe des fonctions scalaires φ définies sur $[0,\ k[,\ 0 < k \leq +\infty$ continues, strictement croissantes et qui vérifient $\varphi(0) = 0$.

On peut montrer [10] que V est définie positive dans une boule B_R si et seulement si on peut définir deux fonctions de classe $\mathcal{K}$ φ_1 et φ_2 tel que :

$$\varphi_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \varphi_2(\|x\|) \quad \forall x \in B_R$$

Exemple 3 Si V est une fonction définie positive homogène de degré k, $(V(\lambda x) = \lambda^k V(x)$ pour $\lambda \in \mathbb{R})$ alors $V(x) = V(\|x\|\frac{x}{\|x\|}) = \|x\|^k V(\frac{x}{\|x\|})$ pour $x \neq 0$.

On pose $a_1 = Sup\ (V(y)\ /\ \|y\| = 1)$, $a_2 = Inf(V(y)\ /\ \|y\| = 1)$
et on a $\quad a_2\ \|x\|^k \leq V(x) \leq a_1\ \|x\|^k$.

Si V une fonction définie positive alors pour tout $c > 0$ suffisamment petit, l'équation $V(x) = c$ définit une hypersurface fermée autour de l'origine. Cependant cela n'est pas vrai en général pour tout $c > 0$ quelconque.

Exemple 4 Soit $V(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2}{x_1^2 + 1} + x_2^2$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Les surfaces de niveaux $V(x_1, x_2) = c$ ne sont pas fermées autour de zéro pour $c > 1$.

Exercice 1 Dessinez les surfaces de niveaux $V(x_1, x_2) = c$ dans les cas suivants $0 < c < \frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{4}$ et $c > \frac{1}{4}$ pour la fonction $V(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2}{(x_1^2+1)^2} + \dfrac{x_2^2}{(x_2^2+1)^2}$.

Définition 7 *Une fonction définie positive $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ est propre s'il existe une fonction φ de classe $\mathcal{K}$ tel que :*

1. *$V(x) \geq \varphi\ (\|x\|)$ pour tout $x\ \in \mathbb{R}^n$.*
2. *$\lim_{r \to +\infty} \varphi(r) = +\infty$.*

Théorème 1 (Lyapounov 1892) *S'il existe une fonction dérivable V définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que :*

1. $V(x) > 0 \quad \forall x \in U - \{0\}, \quad V(0) = 0$
2. $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in U$

alors l'origine est un point d'équilibre stable.

Preuve Soit $\epsilon > 0$. Comme V est une fonction continue qui vérifie $V(0) = 0$, $\exists\, \delta > 0$ tel que $\|x_0\| < \delta \Rightarrow V(x_0) \leq \varphi\ (\epsilon)$.

Soit x_0 tel que $\|x_0\| < \delta$. Comme V est décroissante le long des trajectoires du système (1), $\forall t \geq 0\ \varphi(\|x(t, x_0)\|)\ \leq V(x(t, x_0))\ \leq V(x_0) < \varphi(\epsilon)$ et donc

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x_0)\| \quad \forall t \geq 0.$$

Théorème 2 (Lyapounov 1892) *S'il existe une fonction dérivable V définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que :*

1. $V(x) > 0 \quad \forall x \in U - \{0\}, \quad V(0) = 0$
2. $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in U - \{0\}, \quad \dot{V}(0) = 0.$

alors l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Preuve La démonstration est laissée à titre d'exercice. Voir théorème 12

Remarque 1 *Le théorème 2 admet une réciproque.*

Si l'origine est une position d'équilibre asymptotiquement stable, alors il existe une fonction de Lyapounov stricte (ie. vérifiant les conditions du théorème 2).

Reprenons l'exemple de l'oscillateur harmonique dans le cas
$m = 1$, $k = 2$ et $d(\dot{x}) = \dot{x}$
On a alors le système :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -2z_1 - z_2 \end{cases}$$

et $\dot{E} = -z_2^2 \leq 0$.

D'après le théorème 1 l'origine est une position d'équilibre stable.

Cependant si on considère la fonction $V = 7z_1^2 + 2z_1z_2 + 3z_2^2$ on a $\dot{V} = -4z_1^2 - 4z_2^2$. D'après le théorème 2 l'origine est une position d'équilibre asymptotiquement stable.

Cet exemple illustre le fait qu'un choix judicieux d'une fonction de Lyapounov peut donner plus d'informations que la fonction énergie.

2.3 Théorèmes de Barbaschin - Krasovskii et Principe d'invariance de Lasalle

Les travaux de Lyapounov ont été généralisés par E.A. Barbaschin et N.N. Krasovskii à l'Est et par le mathématicien Américain J.P. Lasalle à l'Ouest. Les résultats obtenus permettent dans les deux cas de généraliser le théorème de stabilité asymptotique de Lyapounov à des fonctions V pour lesquelles $\dot{V} \leq 0$ et l'ensemble $\{x \ / \ \dot{V}(x) = 0\} - \{0\}$ ne contient pas d'ensemble positivement invariant. Ils augmentent ainsi la classe des fonctions considérées et rendent plus facile l'étude de la stabilité.

Définitions et notations :

On dit qu'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ est invariant (resp. positivement invariant) si $\gamma\ (x_0) \subset A$ (resp. $\gamma^+(x_0) \subset A$) pour tout x_0 dans A.

Une suite de réels strictement croissante (resp. décroissante) tendant vers l'infini est appellée *ω-suite* (resp. *α-suite*).

On dit que y est un point *ω-limite* (resp. point *α-limite*) de x_0 s'il existe une *ω-suite* (resp. une *α-suite*) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x(t_n, x_0) = y$.

On note $L^+(x_0)$ (resp. $L^-(x_0)$) l'ensemble des points *ω-limites* (resp. points *α-limites*) de x_0.

Compte tenu de leurs définitions, il est facile de voir que les ensembles $L^+(x_0)$ et $L^-(x_0)$ sont fermés et invariants.

Exercice 2 Monter que $L^+(x_0) = \bigcap\limits_{t\geq 0} \overline{\{x(s,x_0)\ s \geq t\}}$ et $L^-(x_0) = \bigcap\limits_{t\leq 0} \overline{\{x(s,x_0)\ s \leq t\}}$

Lemme 1 *Soit V une fonction dérivable définie sur un compact K de $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles telle que $\forall x \in K,\ \dot{V}(x) \leq 0$. Si la demi trajectoire $\gamma^+(x_0)$ est contenue dans K alors on a la relation*

$$V(y) = V(z) \quad \forall y,\ z \in L^+(x_0)$$

Preuve : Soit $\gamma^+(x_0) \subset K$, l'ensemble $L^+(x_0)$ est non vide. Étant donnés $y \in L^+(x_0)$ et $z \in L^+(x_0)$, il existe deux suites croissantes tendant vers l'infini $(t_n)_n$ et $(\tau_n)_n$ telles que

$$\lim_{n\to+\infty} x(t_n, x_0) = y \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x(\tau_n, x_0) = z$$

Sans perdre la généralité on peut supposer

$$t_n \leq \tau_n \quad \forall n \geq 1$$

La fonction V est décroissante le long des trajectoires et donc

$$V(x(\tau_n, x_0)) \leq V(x(t_n, x_0)) \quad \forall n \geq 1$$

En passant à la limite on obtient

$$V(z) \leq V(y)$$

De même on peut aussi supposer sans perdre la généralité que

$$\tau_n \leq t_n \quad \forall n \geq 1$$

et obtenir après passage à la limite

$$V(y) \leq V(z)$$

et donc

$$V(y) = V(z).$$

Théorème 3 (Krasovsky 1959) *Supposons qu'il existe une fonction dérivable V définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que :*

1. $V(x) > 0 \ \forall x \in U - \{0\} \quad V(0) = 0$
2. $\dot{V}(x) \leq 0 \ \forall x \in U$
3. *L'ensemble* $M = \{x \in U \ / \dot{V}(x) = 0\}$ *ne contient aucune demi-trajectoire positive autre que* $\{0\}$.

Alors l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Preuve Le point $x = 0$ est une position d'équilibre stable [cf. Théorème 1].
Soit $\epsilon > 0$, tel que $\bar{B}_\epsilon \subset U$ alors $\forall \ \epsilon > 0$, $\exists \ \delta \ (\epsilon) > 0$ tel que

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x_0)\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

Ecrivons encore une fois que $x = 0$ est stable. Soit $R > 0$ fixé tel que $\bar{B}_R \subset U$ alors $\exists \ r(R) > 0$ tel que

$$\|x_0\| < r \Rightarrow \|x(t, x_0)\| < R \quad \forall t \geq 0.$$

Pour tout $x_0 \in B_r$ montrons qu'il existe un instant $T \geq 0$ tel que

$$\|x(T, x_0)\| < \delta$$

Supposons que

$$\delta \leq \|x(t, x_0)\| \quad \forall \ t > 0$$

On a alors

$$\delta \leq \|x(t, x_0)\| \leq R \quad \forall \ t > 0$$

Ce qui prouve que $L^+(x_0)$ est non vide et ne contient pas l'origine.

Soit $y \neq 0$ un élément de $L^+(x_0)$, $L^+(x_0)$ étant positivement invariant on a $\gamma^+(y) \subset L^+(x_0)$.

D'après le lemme 1 V est constante le long de $\gamma^+(y)$ et donc $\dot{V}(x) = 0 \ \ \forall x \in \gamma^+(y)$. Ce qui contredit l'hypothèse 3 du théorème.

Donc il existe un instant $T > 0$ tel que $\|x(T, x_0)\| < \delta$ et par conséquent on a

$$\|x(t, x_0)\| < \epsilon \ \forall t > T.$$

$\epsilon > 0$ étant arbitrairement choisit on a bien démontré que

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t, x_0)\| = 0 \quad \forall x_0 \in B_r.$$

Reprenons l'exemple de l'oscillateur harmonique.

On a $\dot{E} = -z_2^2 \leq 0$

$\dot{E}$ s'annule uniquement pour $z_2(t) = 0$ ce qui implique que $kz_1(t) = 0$ donc $z_1(t) = 0$. En conclusion $\dot{E}$ s'annule uniquement sur la trajectoire triviale du système. D'après le théorème 3 l'origine est asymptotiquement stable.

Théorème 4 [Barbaschin Krasovsky 1952] *S'il existe une fonction dérivable* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ *telle que*

1. $V(x) > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}, \ \ V(0) = 0$
2. $\dot{V}(x) \leq 0 \ \forall x \ \in \mathbb{R}^n$
3. *L'ensemble* $M = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \dot{V}(x) = 0\}$ *ne contient aucune demi trajectoire positive autre que* $\{0\}$
4. *Toutes les solutions* $x(t, x_0), \ t \geq 0$ *du système (1) sont bornées.*

Alors l'origine est une position d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Preuve Les hypothèses du théorème 3 sont vérifiées, l'origine est donc une position d'équilibre asymptotiquement stable.

Montrons par l'absurde que $\forall \ x \ \in \mathbb{R}^n \ \lim_{t \to +\infty} \|x(t, x_0)\| = 0$.

Soit x_0 tel que $\lim_{t \to +\infty} \|x(t, x_0)\| \neq 0$, $\gamma^+(x_0)$ étant bornée et x_0 n'appartenant pas au domaine d'attraction de l'origine, l'ensemble $L^+(x_0)$ est non vide et ne contient pas l'origine.

$L^+(x_0)$ est un ensemble positivement invariant il existe donc $y \neq 0$ tel que $\gamma^+(y) \subset L^+(x_0)$.

D'après le lemme 1, V est constante le long de $\gamma^+(y)$ et donc $\dot{V}(x) = 0, \ \forall x \in \gamma^+(y)$. Ce qui contredit l'hypothèse 3 du théorème.

Théorème 5 [Principe d'invariance (J.P. Lasalle 1960)]

Soit Ω *un sous ensemble compact positivement invariant de* $\mathbb{R}^n$.

On suppose qu'il existe une fonction dérivable V *définie sur* Ω *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $\dot{V}(x) \leq 0$ *dans* Ω. *Soit* E *l'ensemble des points de* Ω *tels que* $\dot{V}(x) = 0$ *et* M *le plus grand ensemble invariant contenu dans* E. *Toute trajectoire du système qui commence dans* Ω *tends vers* M *lorsque* $t \to +\infty$.

Preuve C'est une conséquence directe du lemme 1.

Soit $x_0 \in \Omega$, montrons que $L^+(x_0) \subset M$. En effet, $\gamma^+(x_0) \subset \Omega$ car Ω est un ensemble positivement invariant. $L^+(x_0)$ est alors un ensemble non vide invariant. D'après le lemme 1, V est constante sur $L^+(x_0)$ c'est à dire $\dot{V}(x) = 0$ sur $L^+(x_0)$ donc $L^+(x_0) \subset M$ et $\lim_{t \to +\infty} d(x(t, x_0), L^+(x_0)) = 0$.

Corollaire 1 *S'il existe une fonction dérivable V définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que*

1. $V(x) > 0 \ \forall x \in U - \{0\} \quad V(0) = 0$
2. $\dot{V}(x) \leq 0 \ \forall x \in U$
3. *Le plus grand ensemble invariant contenu dans $\{x \in U \ / \ \dot{V}(x) = 0\}$ est réduit à $\{0\}$*

Alors l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Remarque 2 *Si $V \geq 0$ alors $\{x \in \Omega \ / \ V(x) = 0\} \subset M$ car c'est un ensemble invariant inclus dans E. En l'état le principe d'invariance de Lasalle ne permet pas de généraliser les théorèmes de Lyapounov à des fonctions $V \geq 0$.*

Le problème de la généralisation de la théorie de Lyapounov à des fonctions semi-définies positives peut se formuler de la manière suivante : étant donné un système qui admet un ensemble invariant attractif, sous quelles conditions supplémentaires peut on obtenir des résultats de stabilité ? Ce problème a été résolu dans le cas particulier des systèmes triangulaires en 1970 par Seibert et Suarez. Une solution générale a été donnée par l'école de Minsk

2.4 Théorèmes de Bulgakov - Kalitine

Soit Y un ensemble fermé positivement invariant contenant l'origine.

Définition 8 *On dit que $x = 0$ est stable par rapport à Y si*

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \ \delta = \delta(\epsilon) > 0 \ \text{tel que} \ x_0 \in (B_\delta \cap Y) \Rightarrow \|x(t, x_0)\| < \epsilon \ \ \forall t \geq 0$$

Si de plus il existe $\Delta > 0$ tel que $x_0 \in (B_\Delta \cap Y) \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} x(t, x_0) = 0$, alors on dit que $x = 0$ est asymptotiquement stable par rapport à Y.

Lemme 2 *Si $x = 0$ est instable par rapport à Y alors pour tout voisinage W de l'origine il existe $p \in Y$ tel que $\gamma^{-1}(p) \subset (W - \{0\}) \cap Y$*

Preuve Soit W un voisinage de l'origine. Si $x = 0$ est instable par rapport à Y, il existe $\epsilon > 0$ $(\bar{B}_\epsilon \subset W)$, une suite $(x_{0n})_n \subset Y$ tel que $\lim_{n \to +\infty} \|x_{0n}\| = 0$ et une suite $(t_n)_n \subset \mathbb{R}^+$ tel que $\lim_{n \to +\infty} t_n = +\infty$

avec

$$\|x(t_n, x_{0n})\| = \epsilon$$

et

$$\|x(t, x_{0n})\| < \epsilon \text{ si } 0 < t < t_n$$

L'ensemble $\bar{B}_\epsilon \cap Y$ est compact. On peut sans perdre de généralité supposer que la suite $p_n = x(t_n, x_{0n})$ est convergente. Soit $p = \lim\limits_{n\to+\infty} x(t_n, x_{0n})$ Y étant fermé positivement invariant, on a alors $\|p\| = \epsilon$ et $p \in Y$.

Raisonnons par l'absurde et montrons que $\gamma^-(p) \subset \bar{B}_\epsilon - \{0\}$.

Soit $\tau < 0$ tel que $\|x(\tau, p)\| > \epsilon$ on pose $\alpha = \|x(\tau, p)\| - \epsilon$. Les solutions du système (1) sont continues par rapport aux conditions initiales, $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$, on peut trouver un entier n tel que

$$t_n + \tau > 0$$

$$\text{et } \|x(\tau, x(t_n, x_{0n})) - x(\tau, p)\| < \alpha/2$$

La condition de groupe à un paramètre et l'inégalité triangulaire donnent :

$$\begin{aligned}\|x(t_n+\tau, x_{0n})\| &= \|x(\tau, x(t_n, x_{0n}))\| = \|x(\tau, x(t_n, x_{0n})) - x(\tau, p) + x(\tau, p)\| \\ &\geq \|x(\tau, p)\| - \|x(\tau, x(t_n, x_{0n})) - x(\tau, p)\| > \alpha + \epsilon - \frac{\alpha}{2} > \epsilon + \frac{\alpha}{2} > \epsilon.\end{aligned}$$

Ce qui est une contradiction.

Montrons que $\gamma^-(p) \subset Y$.

Soit $\tau > 0$, la continuité par rapport aux conditions initiales permet d'écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} \|x(\tau, p_n) - x(\tau, p)\| = 0$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} x(t_n+\tau, x_{0n}) = \lim_{n\to+\infty} x(\tau, x(t_n, x_{0n})) = x(\tau, p)$$

Or $t_n + \tau > 0$ pour n suffisamment grand et Y positivement invariant.

$x_{0n} \in Y \Rightarrow x(t_n+\tau, x_{0n}) \in Y \Rightarrow x(\tau, p) \in Y$ car Y est fermé.

Théorème 6 *L'origine est une position d'équilibre asymptotiquement stable par rapport à Y si et seulement si il existe un voisinage W de l'origine tel que l'ensemble $(W - \{0\}) \cap Y$ ne contient aucune demi trajectoire négative*

Preuve Soit W un voisinage de l'origine tel que l'ensemble $(W - \{0\}) \cap Y$ ne contient aucune demi trajectoire négative. D'après le lemme 2, $x = 0$ est stable par rapport à Y.

Raisonnons par l'absurde et supposons que l'origine n'est pas un point attractif.

Il existe $x_0 \in B_\Delta$ tel que $0 \notin L^+(x_0)$. Soit $p \in L^+(x_0), Y$ étant positivement invariant on a $L^+(x_0) \subset Y$ donc $\gamma^-(p) \subset (L^+(x_0) - \{0\}) \cap Y$.

D'où la contradiction.

Réciproquement soit $\Delta > 0$ tel que $\bar{B_\Delta} \cap Y$ est inclus dans le domaine d'attractivité de l'origine.

Raisonons par l'absurde et supposons qu'il existe une demi trajectoire négative $\gamma^-(p) \subset (B_\Delta - \{0\}) \cap Y$.

$L^-(p)$ est alors un ensemble non vide compact et invariant. Soit $q \in L^-(p)$, $L^+(q) \subset L^-(p)$. Or q appartient au domaine d'attractivité de l'origine et donc $\{0\} = L^+(q)$. Comme $L^+(q) \subset L^-(p)$, $\{0\} \in L^-(p)$. Ce qui est une contradiction, car l'origine est un point d'équilibre Y stable.

Théorème 7 [Bulgakov [1980] Kalitine [1982]] *S'il existe une fonction dérivable $V : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ telle que*

1. $V(x) \geq 0 \quad \forall x \in U \quad V(0) = 0$
2. $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in U$
3. *l'origine est asymptotiquement stable par rapport à l'ensemble* $Y_0 = \{x \in U / V(x) = 0\}$

Alors l'origine est un point d'équilibre stable.

Preuve Montrons par l'absurde que $x = 0$ est stable.

D'après la démonstration du lemme 2, il existe $\epsilon > 0$ $\bar{B}_\epsilon \subset U$, une suite $(x_{0n})_n \subset B_\epsilon$, tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{0n} = 0$ et une suite $(t_n)_n \subset \mathbb{R}^+$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = +\infty$

avec

$$\|x(t_n, x_{0n})\| = \epsilon.$$

et

$$\|x(t_n, x_{0n})\| < \epsilon \text{ pour } 0 \leq t < t_n$$

La suite $p_n = x(t_n, x_{0n})$ converge vers un point $p \neq 0$ tel que $\gamma^-(p) \subset B_\epsilon$.

Montrons que $V(y) = 0$, $\forall y \in \gamma^-(p)$. Soit $\tau < 0$ tel que $y = x(\tau, p)$ et n un entier tel que $\tau + t_n > 0$ on a alors $x(x(\tau, (t_n, x_{0n})) = x(t_n + \tau, x_{0n})$. Les hypothèses 1 et 2 du théorème donnent

$$0 \leq V(x(t_n + \tau, x_{0n})) \leq V(x_{0n}) \text{ ce qui prouve que } \lim_{n \to +\infty} V(x(t_n + \tau, x_{0n})) = 0$$

Après passage à la limite on obtient

$$V(y) = V(x(\tau, p)) = \lim_{n \to +\infty} V(x(t_n + \tau, x_{0n})) = 0$$

donc $\gamma^-(p) \subset (B_\epsilon - \{0\}) \cap Y$. Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse 3 en vertu du théorème 6.

Théorème 8 [Bulgakov Kalitine 1978] *S'il existe une fonction dérivable $V : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ telle que*

1. $V(x) \geq 0 \quad \forall x \in U \quad V(0) = 0$

2. $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in U$

3. l'origine est asymptotiquement stable par rapport au plus grand ensemble invariant Y^* *contenu dans* $\{x \in U / \dot{V}(x) = 0\}$.

Alors l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Preuve Par définition l'ensemble Y_0 est un ensemble invariant contenu dans Y^*. D'après le théorème 7 l'origine est un point d'équilibre stable et on peut écrire

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\ x_0 \in B_\delta \Rightarrow x(t, x_0)\ \in B_\epsilon.$$

Montrons que l'origine est attractive. Soit $x_0 \ \in B_\delta,\ L^+(x_0)$ est un ensemble compact non vide inclus dans $\bar{B}_\epsilon$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $L^+(x_0) \neq \{0\}$. Soit $p \ \in L^+(x_0),\ \gamma^-(p) \subset L^+(x_0)$ car $L^+(x_0)$ est invariant. D'après le lemme 1 $\gamma^-(p)$ est contenu dans Y^* ce qui est en contradiction avec l'hypothèse 3 en vertu du théorème 6.

Remarque 3 *On peut remplacer la condition 3 par l'une des conditions suivantes :*

- *(3') L'ensemble* $\{x \in U\ /\ \dot{V}(x) = 0\}$ *ne contient aucune demi trajectoire négative autre que* $\{0\}$.
- *(3'') Le système (1) restreint au plus grand ensemble invariant* Y^* *contenu dans* $\{x \in U\ /\ \dot{V}(x) = 0\}$ *est asymptotiquement stable.*

Exemple 5 Soit le système

$$\left\{\begin{array}{ll} \dot{x}_1 & = x_2 - \ x_1^3 \\ \dot{x}_2 & = x_3 - \ x_2^3 \\ \vdots & \\ \dot{x}_{n-1} & = x_n - \ x_{n-1}^3 \\ \dot{x}_n & = - \ x_n^3 \end{array}\right. \qquad (\Sigma_n)$$

Pour $n \geq 2$ notons H_n l'hypothèse de récurrence : l'origine est une position d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (Σ_n).

H_2 est vrai. En effet $V_2(x_1, x_2) = \dfrac{1}{2}x_2^2$ est une fonction semi définie positive dont la dérivée $\dot{V}$ par rapport à Σ_2 est $\dot{V}(x_1, x_2) = -x_2^4$.

$Y_2 = \{(x_1, x_2) \in R^2 /\ \dot{V}(x_1, x_2) = 0\} = \{(x_1, 0),\ x_1 \in R\}$.

C'est un ensemble positivement invariant pour Σ_2.

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 - \ x_1^3 \\ \dot{x}_2 = - \ x_2^3 \end{array}\right. \qquad \Sigma_2$$

La restriction du système Σ_2 à l'ensemble Y_2 est $\dot{x}_1 = -x_1^3$; $x_1 = 0$ est asymptotiquement stable pour le système réduit (x_1^2 est une fonction de Lyapounov stricte).
D'après le théorème 8, H_2 est vrai.

Supposons H_{n-1} vrai

Soit $V_n(x_1, \dots x_n) = \frac{1}{2}x_n^2$. C'est une fonction semi-définie positive dont la dérivée par rapport au système Σ_n est $\dot{V}_n(x) = -x_n^4$.

$Y_n = \{x \in R^n \ / \ \dot{V}_n(x) = 0\} = \{(x_1, \dots x_{n-1}, 0), (x_1 \dots x_{n-1}) \in R^{n-1}\}$. C'est un ensemble positivement invariant pour Σ_n.

Le système réduit à Y_n est donné par Σ_{n-1}.

Théorème 9 [Bulgakov Kalitine 1978] *S'il existe une fonction dérivable $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ telle que*

1. $V(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad V(0) = 0$
2. $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
3. *l'origine est asymptotiquement stable par rapport au plus grand ensemble invariant Y^* contenu dans $\{x \in \mathbb{R}^n \ / \dot{V}(x) = 0\}$*
4. *Toutes les solutions $x(t, x_0)$ $t \geq 0$ sont bornées.*

Alors l'origine est une position d'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Preuve Les hypothèses du théorème 8 sont vérifiées, l'origine est donc un point d'équilibre asymptotiquement stable. Pour montrer la globale attractivité on utilise le même raisonnement que dans la démonstation du théorème 4.

Corollaire 2 [Seibert-Suarez]

On considère le système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \quad (x, y) \in R^p \times \mathbb{R}^q \\ \dot{y} = g(y) \end{cases}$$

où f et g sont des fonctions dérivables telles que $f(0,0) = 0$, $g(0) = 0$.

Ce système est asymptotiquement stable si et seulement si les systèmes définis respectivement sur $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ par

$$\dot{x} = f(x, 0) \quad \textit{et} \quad \dot{y} = g(y)$$

sont asymptotiquement stables.

Preuve Il est immédiat que la condition est nécéssaire. Montrons qu'elle est suffisante. D'après la remarque 1, il existe une fonction dérivable $V : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^+$ définie positive tel que $\dot{V}(y)$ est définie négative.

Soit $W(x, y) = V(y)$ on a $W(x, y) \geq 0$, $\dot{W}(x, y) = \dot{V}(y) \leq 0$ et

$Y_0 = Y = \{(x, 0) \ / x \in \mathbb{R}^p\}$. D'après le théorème 8 l'origine est une position d'équilibre asymptotiquement stable.

Remarque 4 *Il s'agit d'un résultat local comme on peut le voir sur l'exemple suivant*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y(x^2y^2 - 1) \end{cases}$$

Les sous systèmes $\dot{x} = x$ *et* $\dot{y} = -y$ *sont globalement asymptotiquement stables. Cependant l'ensemble* $x^2y^2 = 2$ *est invariant ; la stabilité n'est que locale. Pour obtenir un résultat global il faut supposer que les trajectoires sont bornées positivement*

Exercice 3 Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -(y + x^3)(y + a(x))^2 - 3x^2y \end{cases}$$

où $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable telle que $a(0) = 0$.

Étudier la stabilité de ce système en utilisant la fonction $V = \frac{1}{2}(x + y^3)^2$

Exercice 4 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact invariant. On suppose qu'il existe une fonction dérivable $V : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $\dot{V}(x) \leq 0$.

Montrer que si $x = 0$ est asymptotiquement stable par rapport au plus grand ensemble invariant Y^* contenu dans $\{x \in \Omega \ / \ \dot{V}(x) = 0\}$ alors $x = 0$ est asymptotiquement stable.

Solution Soit $x_0 \in \Omega$, Ω étant positivement invariant $\gamma^+(x_0)$ est contenu dans Ω. D'après le principe d'invariance de Lasalle $L^+(x_0) \subset Y^*$ ce qui prouve que l'origine est attractive.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $x = 0$ est instable. D'après la démonstration du lemme 2, il existe $\epsilon > 0$, $p \in \Omega$ tel que $\gamma^-(p) \subset \bar{B}_\epsilon - \{0\} \subset \Omega$. Suivant la démonstration du théorème (6), $L^-(p)$ est un ensemble non vide compact invariant. Soit $q \in L^-(p)$ on a $L^+(p) \subset L^-(p)$ or $L^+(p) \subset Y^*$ et donc $\{0\} \in L^-(p)$ ce qui est une contradiction.

Contrairement aux apparences l'exercice précédent ne permet pas de généraliser le théorème de Bulgakov-Kalitine. Pour s'en convaincre il suffit de résoudre l'exercice suivant

Exercice 5 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact invariant. On suppose qu'il existe une fonction dérivable $V : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $\dot{V}(x) \leq 0$.

Montrer que si $x = 0$ est asymptotiquement stable par rapport au plus grand ensemble invariant Y^* contenu dans $\{x \in \Omega \ / \ \dot{V}(x) = 0\}$ alors $V(x) \geq V(0)$ pour tout x.

Solution [1] Sans perdre de généralité nous pouvons supposer que $V(0) = 0$, nous allons voir dans ce cas que $V(x) \geq 0$ pour tout x.

[1] C'est avec plaisir et surtout par amitié Pour Boris Kalitine, mon ancien professeur, que je donne la solution de cet exercice.

Soit $x_0 \in Y^*$ on a $x(t,x_0) \in Y^*$ $\forall t \geq 0$ car Y^* est positivement invariant.

Comme V est continue et que $x = 0$ est asymptotiquement stable par rapport à Y^* on a

$$\lim_{t \to +\infty} V(x(t,x_0)) = V(0) = 0$$

Donc V est identiquement nulle sur Y^*.

Soit $x_0 \in \Omega$, d'après le lemme 1, $L^+(x_0)$ est contenu dans Y^*.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $V(x_0) < 0$ et soit $y \in L^+(x_0)$. On a

$$V(y) = \lim_{n \to +\infty} V(x(t_n, x_0))$$

Or V est décroissante le long des trajectoires du système.

$$0 = V(y) \leq V(x_0) < 0$$

Ce qui est une contradiction.

Note bibliographique Le théorème sur la stabilité a été établi séparément par Bulgakov[4] et par Kalitine [5] alors qu'il était en poste à l'université d'Alger. Dans ce remarquable article présenté en 1981 par le mathématicien Francais Claude Lobry à la revue RAIRO, Kalitine expose une généralisation de la théorie de Lyapounov à des systèmes dynamiques sur un espace localement compact. Ce qui permet de conclure dans le cas de systèmes périodiques. Il est à noter qu'indépendamment de Kalitine le mathématicien Biolorusse Grudo résoud aussi le cas périodique en 1983 [6].

3 Systèmes non autonomes

On considère un système décrit par l'équation différentielle

$$\dot{x} = F(t,x)$$

où $x \in R^n$ et $F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continuement dérivable tel que $F(t,0) = 0 \ \forall \ t \geq 0$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \geq 0$ on note $x(t,t_0,x_0)$ l'unique solution du problème de Cauchy.

$$\begin{cases} \dot{x} = F(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Définition 9 *On dit que $x = 0$ est un point d'équilibre uniformément stable si :*
$\forall \ \epsilon > 0 \ \exists \ \delta(\epsilon) > 0 \ \forall t_0 \geq 0 \quad \|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t,t_0,x_0)\| < \epsilon \ \forall t \geq t_0$

Dans cette définition il faut noter que δ est indépendant de t_0

Exemple 6 Soit l'équation scalaire

$$\dot{x}(t) = a(t)\ x$$

avec $x \in \mathbb{R}$ et a une fonction continue pour $t \geq 0$.

$x = 0$ est uniformément stable si et seulement si il existe une constante M

$$\int_{t_0}^{t} a(s)ds \leq M \quad \text{pour } t \geq t_0 \geq 0.$$

L'équation est à variables séparables et on peut la résoudre explicitement.

$$x(t,\, t_0,\, x_0) = x_0\ exp\ (\int_{t_0}^{t} a(s)ds)$$

pour ϵ donné il suffit de choisir $\delta = \epsilon\ exp\ (-M)$

Soit $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+,\ (t,x) \to V(t,x)$ une fonction continument différentiable telle que $V(t,0) = 0$ pour tout $t \geq 0$.

On note $\dot{V}(t,x)$ la dérivée de V le long des trajectoires du système

$$\dot{V}(t,x) = \frac{dV}{dt}(t,x(t)) = \frac{\partial V}{\partial t} + < \frac{\partial V}{\partial x}, F(t,x) >$$

Théorème 10 *On suppose qu'il existe un voisinage U de l'origine, une fonction V continument différentiable $V : \mathbb{R}^+ \times U \to \mathbb{R}^+$telle que $V(t,0) = 0$ pour $t \geq 0$ et deux fonctions $\bar{a}$ et $\bar{b}$ de classe $\mathcal{K}$ tels que :*

1. $\bar{a}\ (\|x\|) \leq V(t,x) \leq \bar{b}\ (\|x\|) \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times U$
2. $\dot{V}(t,x) \leq 0 \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times U$

alors $x = 0$ est un point d'équilibre uniformément stable.

Preuve Soit $\epsilon > 0$. Comme $\bar{b}$ est une fonction continue qui vérifie $\bar{b}(0) = 0$ $\exists\, \delta > 0$ tel que $\|x_0\| < \delta \Rightarrow \bar{b}\ (\|x_0\|) < \bar{a}\ (\epsilon)$. Or $\bar{a}\ (\|x_0\|) \leq V(t,x_0) \leq \bar{b}\ (\|x_0\|)\ \ \forall t \geq t_0$

Comme V est décroissante le long des trajectoires du système on a

$$\bar{a}\ (\|x(t,t_0,x_0)\|)\ \leq V(t,x(t,t_0,x_0)) \leq V(t_0,x_0) < \bar{b}\ (\|x_0\|) < \bar{a}\ (\epsilon)\ \ \forall t \geq t_0.$$

et donc

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \forall t \geq t_0,\ \ \|x(t,t_0,x_0)\| < \epsilon.$$

Ce théorème admet une réciproque.

Théorème 11 (Krasovskii) *Si $x = 0$ est uniformément stable alors il existe une fonction continument différentiable $V : \mathbb{R}^+ \times B_\rho \to \mathbb{R}^+$ $\rho > 0$, des fonctions $\bar{a}$, $\bar{b}$ de classe $\mathcal{K}$ et un nombre $M > 0$ tel que*

1. $\bar{a}\ (\|x\|) \leq V(t,x) \leq \bar{b}\ (\|x\|)\ \ \forall (t,x)\ \in \mathbb{R}^+ \times B_\rho$

2. $\dot{V}(t,x) \leq 0\ \ \forall (t,x)\ \in \mathbb{R}^+ \times B_\rho$

3. $\|\dfrac{\partial V}{\partial x}(t,x)\|\ \leq M\ \ \forall (t,x)\ \in \mathbb{R}^+ \times B_\rho$

On peut trouver une démonstration de ce théorème dans [8].

Définition 10 *On dit que $x = 0$ est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable si*

1. *$x = 0$ est uniformément stable.*

2. *$\exists\ \sigma > 0\ \forall \xi > 0\ \exists\ T_1 = T_1(\xi) > 0$ tel que*

$$\|x_0\| < \sigma \Rightarrow \|x(t,t_0,x_0)\|\ < \xi\ \forall t \geq t_0 + T_1$$

Exercice 6 Monter que $x = 0$ est uniformément asymptotiquement stable pour l'équation $\dot{x} = a(t)\ x$ si et seulement si il existe $\alpha > 0$ tel que
$\displaystyle\int_{t_0}^{t} a(s)ds \leq -\alpha(t - t_0)\quad t \geq t_0 \geq 0.$

Théorème 12 *On suppose qu'il existe un voisinage U de l'origine, une fonction V continument différentiable$V\ : \mathbb{R}^+ \times U \to \mathbb{R}^+$telle que $V(t,0) = 0$ pour $t \geq 0$ et trois fonctions $\bar{a}$, $\bar{b}$ et $\bar{c}$ de classe $\mathcal{K}$ tels que*

1. $\bar{a}\ (\|x\|) \leq V(t,x) \leq \bar{b}\ (\|x\|)\ \forall (t,x)\ \in \mathbb{R}^+ \times U$

2. $V(t,x) \leq -\bar{c}\ (\|x\|)\ \forall (t,x)\ \in \mathbb{R}^+ \times U$

alors $x = 0$ est uniformément asymptotiquement stable.

Preuve Soit $\alpha > 0$ tel que $B_\alpha \subset U$ On considère $\sigma > 0$ tel que

$$B_\sigma \subset \{x \in U\ /V(t,x) \leq a(\alpha)\}$$

Montrons que $\forall \xi > 0, \exists\ T(\xi) > 0$ tel que

$$x_0 \in B_\sigma \Rightarrow \|x(t,t_0,x_0)\| < \xi\ \ \forall t \geq t_0 + T$$

Étant donné $\xi > 0$ arbitraire, on considère $\eta > 0$ tel que

$$b(\eta) < a(\xi)$$

Soit $T > \dfrac{b(\alpha)}{c(\eta)}$; montrons par l'absurde que

$$\exists\ T_1 \in [t_0, t_0 + T] \text{ tel que } \|x(T_1,t_0,x_0)\| < \eta\ \ \forall x_0 \in B_\sigma$$

En effet si $\|x(T, t_0, x_0)\| \geq \xi \quad \forall\, t \in [t_0, t_0 + T]$ alors

$$\dot{V}(t, x(t, t_0, x_0)) \leq -\bar{c}\ (\eta) \quad \forall t \in \ [t_0, t_0 + T]$$

Après intégration on a

$$V(t, x(t, t_0, x_0)) - V(t_0, x_0) \leq -\bar{c}\ (\eta)(t - t_0)$$

et donc pour $t = t_0 + T$

$$V(t_0 + T, x(t_0 + T, t_0, x_0)) \leq b\ (\alpha) - \bar{c}\ (\eta)\ T \ < 0$$

Ce qui contredit l'hypothèse (1).

La fonction V est décroissante le long des trajectoires du système. $\forall t \geq t_0 + T$,

$$\bar{a}\ (\|x(t, t_0, x_0)\|) \leq V(t, x(t, t_0, x_0)) \leq V(T_1, x(T_1, t_0, x_0)) \leq \bar{b}\ (\|x(T_1, t_0, x_0)\|) < \bar{b}\ (\xi)$$

Donc

$$\|x(t, t_0, x_0)\| < \xi\ \forall t \geq t_0 + T$$

Ce théorème admet une réciproque

Théorème 13 [Krasovskii] *Si $x = 0$ est uniformément asymptotiquement stable alors il existe une fonction continument différentiable $V : \mathbb{R}^+ \times B_\rho \to \mathbb{R}^+$, $\rho > 0$, des fonctions $\bar{a}$, $\bar{b}$ et $\bar{c}$ de classe $\mathcal{K}$ et un nombre $M > 0$ tel que*

1. $\bar{a}\ (\|x\|) \leq V(t, x) \leq \bar{b}\ (\|x\|)\ \forall (t, x) \ \in \mathbb{R}^+ \times B_\rho$
2. $\dot{V}\ (t, x) \leq -\bar{c}\ (\|x\|)\ \forall (t, x) \ \in \mathbb{R}^+ \times B_\rho$
3. $\|\dfrac{\partial V}{\partial x}(t, x)\| \leq M \quad \forall (t, x) \ \in \mathbb{R}^+ \times B_\rho$

Une démonstration de ce théorème est donnée dans [8]

3.1 Généralisation des théorèmes de stabilité

On considère le système

$$\begin{cases} \dot{x} = X(t, x, y) & x \in \mathbb{R}^p \\ \dot{y} = Y(t, x, y) & y \in \mathbb{R}^q \end{cases} \tag{2}$$

On suppose que les fonctions X et Y sont continues, localement lipschitziennes par rapport à x et y uniformément par rapport à t et s'annulent au point $(x, y) = (0, 0)$ pour tout $t \geq 0$.

Pour $t_0 \geq 0$ et pour tout point (x_0, y_0) d'un voisinage ouvert connexe $U = (U_x, U_y)$ de l'origine dans R^{p+q}, on note $(x(t), y(t)) = (x(t, t_0, x_0, y_0), y(t, t_0, x_0, y_0))$ l'unique solution du système (2) qui vérifie la condition initiale $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$.

Définition 11 *Soit* $\varphi : \mathbb{R}^+ \times U_x \to \mathbb{R}^q$ *une fonction continue qui s'annule en* $x = 0$ *pour tout* $t \geq 0$. *On dit que l'origine du système* (2) *est stable par rapport à* $(y - \varphi(t,x))$ *si*

$$\forall\ \mu > 0\quad \forall t_0 \geq 0\quad \exists\ \delta\ (\mu, t_0) > 0 \text{ tel que } \|(x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow \|y(t) - \varphi(t, x(t))\| < \mu \quad (3)$$

Si δ *est indépendant de* t_0 *on dit que l'origine est uniformément stable par rapport à* $(y - \varphi(t,x))$.

Théorème 14 *On suppose qu'il existe une fonction continue* $\varphi : \mathbb{R}^+ \times U_x \to \mathbb{R}^q$, $\varphi(t,0) = 0$, *localement lipschitzienne par rapport à* x *uniformément par rapport à* t *telle que*

1. *l'origine est uniformément stable par rapport à* $(y - \varphi(t,x))$ *;*
2. *la solution du système réduit*

$$\dot{x} = X(t, x, \varphi(t,x)), \quad x \in U_x, \quad t \geq 0 \tag{4}$$

est uniformément asymptotiquement stable

Alors l'origine est une position d'équilibre uniformément stable du système (2)

Preuve La solution $x = 0$ du système (4) est uniformément asymptotiquement stable. D'après le théorème 13 il existe une fonction de classe C^1 $v : \mathbb{R}^+ \times B_\rho^p \to \mathbb{R}^+$ $(\rho > 0,\ B_\rho^p \subset U_x)$, trois fonctions $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ de classe $\mathcal{K}$ et un nombre $M > 0$ tel que

- (a) $\bar{a}\ (\|x\|) \leq v\ (t,x) \leq \bar{b}\ (\|x\|)$.
- (b) $\dot{v}_4(t,x) \leq -\bar{c}\ (\|x\|)$
- (c) $\|\dfrac{\partial v\ (t,x)}{\partial x}\| \leq M \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times B_\rho^p$.

$\dot{v}_4$ désigne la dérivée de v par rapport au temps le long des trajectoires du système (4)

On peut trouver deux constantes $L_1 > 0$ et $L_2 > 0$ telles que

$$\|X(t,x,y) - X(t,x,\bar{y})\| \leq L_1 \|y - \bar{y}\| \tag{5}$$

$$\|\varphi(t,x)\| \leq L_2\ \|x\| \tag{6}$$

pour tout $(x,y), (x,\bar{y})$ dans B_ρ^{p+q} et pour tout $t \geq 0$.

Soit $\epsilon > 0$ et $t_0 \geq 0$. Sans perdre la généralité on peut supposer

$$\epsilon < \text{ Min } (\frac{\rho}{2\ L_2},\ \rho) \tag{7}$$

Considérons $\gamma = \gamma(\epsilon) > 0$ tel que

$$\bar{b}\ (\gamma) < \bar{a}\ (\epsilon), \quad \gamma < \epsilon \tag{8}$$

On pose

$$-\sigma = \ \sup \ \dot{v_4}(t,x), \ \gamma \leq \|x\| \leq \epsilon, \ \ t \geq 0 \tag{9}$$

la condition (2) du théorème implique $\sigma > 0$.

Soit $\mu > 0$ tel que

$$\mu < \ \mathrm{Min} \ (\frac{\sigma}{2L_1M}, \ \ \frac{\rho}{2}) \tag{10}$$

il existe $\delta = \delta(\mu)$ tel que la relation (3) soit satisfaite.

$\delta = \delta(\mu)$ peut alors être choisit suffisamment petit pour vérifier la relation

$$\delta < \gamma(\epsilon) = \gamma \tag{11}$$

Montrons que la composante $x(t)$ de la solution $(x(t), y(t))$ du système (2) avec la condition initiale $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, \ y_0) \in B_\rho^{p+q}$, $(t_0 \geq 0)$ vérifie l'inégalité.

$$\|x(t)\| < \epsilon \tag{12}$$

aussi longtemps que la composante $y(t)$ vérifie

$$\|y(t)\| < \rho \quad \ t \geq t_0 \tag{13}$$

On raisonne par l'absurde. Si la relation (12) n'est pas vérifiée pour un instant $t \geq t_0$ qui vérifie (13) alors il existe $t_2 > t_1 > t_0$ tel que $\|x(t_1)\| = \gamma$, $\|x(t_2)\| = \epsilon$ et $\gamma < \|x(t)\| < \epsilon$ pour $t_1 < t < t_2$ et $\|y(t)\| < \rho$ pour $t_1 \leq t \leq t_2$.

La dérivée de v par rapport au temps le long des trajectoires du système (2) est donnée par

$\dot{v}(t,x,y) = \dot{v_4}(t,x) +^t [\frac{\partial v(t,x)}{\partial x}] \ [X(t,x,y) - X(t,x,\varphi(t,x)]$.

Des relations (6) et (7) il découle que

$\|\varphi(t, \ x(t))\| \leq L_2\|x(t)\| \leq L_2 \ \epsilon < \rho \quad \forall t \in [t_1, \ t_2]$.

Il s'ensuit que

$\dot{v}(t, \ x(t), \ y(t)) \leq \dot{v_4}(t, x(t)) + ML_1\|y(t) - \varphi(t, \ x(t)) \ \| <$

$-\sigma + ML_1\mu < -\sigma + \dfrac{ML_1\sigma}{2ML_1} = -\sigma/2 < 0$.

Donc v est une fonction décroissante sur l'intervalle $t_1 \ \leq t \ \leq t_2$.

En tenant compte de l'hypothèse (a) du théorème, on peut alors écrire

$\bar{a} \ (\epsilon) = \bar{a} \ (\|x(t_2)\|) \leq v(t_2, x(t_2)) < v(t_1, x(t_1)) \leq \bar{b} \ (\|x(t_1)\|) = \bar{b} \ (\gamma)$. Ce qui contredit l'inégalité (8).

Donc la relation (12) est vérifiée pour $t \geq t_0$ aussi longtemps que l'inégalité (13) est vrai.

Par ailleurs aussi longtemps que $\|x(t)\| < \epsilon$ on a $\|y(t)\| < \rho$.

En effet en combinant les relations (6) et (3) on a

$$\|y(t)\| < \mu + \|\varphi(t, x(t))\| \leq \mu + L_2\|x(t)\| < \mu + L_2\epsilon \tag{14}$$

En prenant en compte (7) et (10) on obtient $\|y(t)\| < \rho/2 + \rho/2 = \rho \quad \forall t \geq t_0$.

Donc l'origine est une position d'équilibre uniformément stable.

Définition 12 *Soit* $\varphi : \mathbb{R}^+ \times U_x \to \mathbb{R}$ *une fonction continue.qui s'annule en* $x = 0$ *pour tout* $t \geq 0$*. On dit que l'origine du système (2) est uniformément asymptotiquement stable par rapport à* $y - \varphi(t, x)$ *si*

1. *l'origine est uniformément stable par rapport à* $y - \varphi(t, x)$
2. $\exists\ \sigma > 0\ \ \forall\ \xi > 0\ \ \exists\ T_1 = T_1(\xi) > 0$ *tel que*

$$(x_0, y_0) \in B_\sigma^{p+q} \Rightarrow \|y(t) - \varphi(t, x(t))\| < \xi,\ \forall t \geq t_0 + T_1 \tag{15}$$

Théorème 15 *On suppose qu'il existe une fonction continue* $\varphi : \mathbb{R}^+ \times U_x \to \mathbb{R}^q$*,* $\varphi(t, 0) = 0$*, localement lipschitzienne par rapport à* x *uniformément par rapport à* t *telle que*

1. *l'origine est uniformément asymptotiquement stable par rapport à* $(y - \varphi(t, x))$*.*
2. *la solution* $x = 0$ *du système réduit*

$$\dot{x} = X(t, x, \varphi(t, x)), \quad x \in U_x, \quad t \geq 0 \tag{16}$$

   est uniformément asymptotiquement stable.

Alors $(x, y) = (0, 0)$ *est une position d'équilibre uniformément asymptotiquement stable.*

Preuve $(x, y) = (0, 0)$ est uniformément stable car les hypothèses du théorème (14) sont vérifiées. $\forall\ R > 0\ \exists\ r(R) > 0$ tel que

$$\|(x_0, y_0)\| < r \Rightarrow \|x(t), y(t)\| < R, \quad \forall t_0 \geq 0,\ \forall t \geq t_0 \tag{17}$$

Soit $v : \mathbb{R}^+ \times B_\rho^p \to \mathbb{R}^+$ une fonction de classe C^1 qui vérifie les conditions du théorème 13. Soient $L_1 > 0$ et L_2 des constantes de Lipschitz qui vérifient les relations (5) et (6) dans le domaine domaine $\mathbb{R}^+ \times B_\rho^{p+q}$.

L'origine est uniformément asymptotiquement stable par rapport à $y - \varphi(t, x)$

$\forall \mu > 0\ \ \exists\ \ \nu = \nu(\mu) > 0$ tel que

$$\|(x_0, y_0)\| < \nu \Rightarrow \|y(t) - \varphi(t, x(t))\| < \mu \quad \forall t_0 \geq 0 \quad \forall t \geq t_0 \tag{18}$$

$\exists\ \sigma > 0\ \forall\ \xi > 0\ \exists\ T_1 = T_1(\xi) > 0$ tel que

$$\|y(t) - \varphi(t, x(t))\| < \xi, \quad \forall t_0 \geq 0,\ \forall t \geq t_0 + T_1, \quad \forall (x_0, y_0) \in B_\sigma^{p+q} \tag{19}$$

Sans perdre de généralité, on suppose $r < \sigma$

Soit $\epsilon > 0$ tel que

$$\epsilon < \min\ \{\frac{\rho}{2L_2}, \rho, r\} \tag{20}$$

$\exists\ \delta = \delta(\epsilon) > 0$ tel que

$$\|(x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow \|(x(t), y(t))\| < \epsilon \quad \forall t_0 \geq 0, \quad \forall t \geq t_0 \tag{21}$$

On choisit $\gamma > 0$ and $\xi > 0$ tel que

$$0 < \gamma < \min\,(\delta, \frac{\delta - \xi}{L_2}) \tag{22}$$

$$0 < \xi < \min\,(\delta, \frac{\bar{c}\,(\gamma)}{ML_1}, \frac{\rho}{2}) \tag{23}$$

$$\bar{b}(\gamma) < \bar{a}(\epsilon) \tag{24}$$

Soit T tel que

$$T > \frac{\bar{b}\,(r)}{\bar{c}\,(\gamma)\; - ML_1\xi} \tag{25}$$

D'après (23) T est un nombre positif.

Soit $(x_0, y_0) \in B_\eta^{p+q}$, η étant choisit tel que $\eta < \min\,\{r, \rho, \delta\}$ et $t_0 \geq 0$, montrons que $\|x(t)\|$ est borné par γ pour les valeurs de t tel que $t_0 + T_1 \leq t \leq t_0 + T_1 + T$.

Supposons par l'absurde que

$$\|x(t)| \geq \gamma \quad \forall t \in [t_0 + T_1, t_0 + T_1 + T] \tag{26}$$

En combinant les relations (6) ,(20) et (21) on a

$$\|\varphi(t, x)\| \leq L_2\; \|x\| \leq L_2\; \epsilon < \rho \tag{27}$$

On considère la dérivée de v le long des trajectoires du système (2)

$\dot{v}(t, x, y) = \dfrac{\partial v}{\partial t} +^t (\dfrac{\partial v}{\partial x}(t, x))[X(t, x, y)]$

$\dot{v}(t, x, y) = \dot{v}_4(t, x) +^t (\dfrac{\partial v}{\partial x}(t, x))[X(t, x, y) - X(t, x, \varphi(t, x)]$.

Si

$$\gamma \leq \|x\| \leq R, \;\; y \in \; B_\rho^q, \;\; \varphi(t, x(t)) \in B_\rho^q \tag{28}$$

Alors

$$\dot{v}(t, x, y) \leq -\bar{c}\,(\gamma) + M\;\, L_1\; \|y(t) - \varphi(t, x(t))\| \tag{29}$$

Les relations (17), (26) et (27) impliquent que la solution $(x(t), y(t))$ vérifie (28).

Si on intégre les deux membres de l'inégalité (29) par rapport à t sur l'interval $[t_0 + T_1, t_0 + T_1 + T]$ on a alors

$v(t, x(t)) \leq v(t_0, x_0) - T\bar{c}\,(\gamma) + ML_1 \int_{t_0+T_1}^{t_0+T_1+T} \|y(r) - \;\varphi(r, x(r))\|\; dr$

En tenant compte de la condition (1) du théorème 13, et des relations (19), (20) et (25) on obtient

$v(t, x(t)) \;\leq \bar{b}\,(r) - T\bar{c}\,(\gamma) + ML_1T\xi < 0$. Ce qui contredit le fait que v est définie positive.

Donc il existe $t_1 \in [t_0 + T_1, t_0 + T_1 + T]$ tel que $\|x(t_1)\| < \gamma$.

Les hypothèses (1) and (2) du théorème 13 donnent

$\bar{a}\ (\|x(t_1)\|) \leq v(t_1, x(t_1)) \leq \bar{b}\ (\|x(t_1)\|) < \bar{b}\ (\gamma)$. L'inégalité (22) implique $\|x(t_1)\| < \delta$.

En combinant les relations (19) et (22) on a

$\|y(t_1)\| < \xi + \|\varphi(t_1, x(t_1))\| \leq \xi + L_2\|x(t_1)\| < \xi + L_2\gamma < \delta$.

D'après (21) on a $\|x(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq t_1$ et à plus forte raison pour $t \geq t_0 + T_1 + T$.

$\epsilon > 0$ étant arbitrairement choisit $\|y(t)\| \to 0$ uniformément par rapport à t_0

Par ailleurs la relation (19) donne pour $(x_0, y_0) \in B_\eta^{p+q}$

$\|y(t)\| < \xi + \|\varphi(t, x(t))\| \leq \xi + L_2\|x(t)\| < \xi + L_2\epsilon \quad \forall \ t_0 \geq 0$ et $t \geq t_0 + T_1 + T$.

Comme ϵ et ξ sont arbitrairement choisit on a $\|y(t)\| \to 0$ uniformément par rapport à t_0.

Théorème 16 *On suppose qu'il existe une fonction de classe* C^1 $\omega : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t, u) \to \omega(t, u)$, $\omega(t, 0) = 0\ \forall\ t \geq 0$, *une fonction de classe* C^1 $V : \mathbb{R}^+ \times U \to \mathbb{R}^+$, $(t, (x, y)) \to V(t, x, y)$, $V(t, 0, 0) = 0\ \forall t\ \geq 0$ *et des fonctions* $\bar{a}$, $\bar{b}$ *de classe* $\mathcal{K}$ *tel que* $\forall\ (t, x, y) \in \mathbb{R}^+ \times U$

1. $\bar{a}\ (\|y - \rho(t, x)\|) \leq V(t, x, y) \leq \bar{b}\ (\|y - \varphi(t, x)\|)$
2. $\dot{V}(t, x, y) \leq \ \omega\ (t, V(t, x, y))$
3. *la solution* $x = 0$ *du système réduit* $\dot{x} = X(t, x, \varphi(t, x)) \quad x \in U_x \quad t \geq 0$ *est uniformément asymptotiquement stable.*

Alors si la solution $u = 0$ *de l'équation de comparaison* $\dot{u} = \omega(t, u)$ *est uniformément stable (respectivement uniformément asymptotiquement stable) alors la solution* $(x, y) = (0, 0)$ *du système (2) est uniformément stable (respectivement uniformément asymptotiquement stable).*

Preuve On suppose $u = 0$ uniformément stable pour l'équation de comparaison.

$\forall \epsilon > 0\ \exists\ \delta^*\ (\epsilon) > 0$ tel que $\forall\ t_0 \geq 0, \quad u_0 < \delta^* \ \Rightarrow\ u\ (t, t_0, u_0)\ < \bar{a}\ (\epsilon)\ \forall\ \ t\ \geq t_0$.

Or, $V(t, x, y) \leq \bar{b}\ (\|(y - \varphi(t,\ x)\|) \leq \bar{b}\ (\|y\| + L_2\ \|x\|)$ et $\delta\ (\epsilon)$ peut être choisit indépendamment de t_0 tel que

$\|(x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow V(t_0, x_0, y_0) < \delta^* \quad \Rightarrow u(t, t_0, V(t_0, x_0, y_0) < \ \bar{a}\ (\epsilon)\ \forall\ t\ \geq t_0$

Soit $u_0 = V(t_0, x_0 y_0)$ on a $V(t, x(t), y(t)) \leq u(t, t_0, u_0)$

D'où la relation

$\|(x_0,\ y_0)\|\ <\ \delta \Rightarrow \bar{a}\ \|y - \varphi(t, x(t))\ \| \leq V(t, x(t), y(t)) \leq u(t, t_0, V(t_0, x_0, y_0) < \bar{a}\ (\epsilon)$.

et donc $\|(x_0,\ y_0)\| < \delta \Rightarrow \|y - \varphi(t,\ x(t))\ \|\ <\ \epsilon$.

Ce qui prouve la stabilité uniforme du système (2) relativement à $y - \varphi(t,\ x)$.

En vertu du théorème 14 l'origine est une position d'équilibre uniformément stable.

Si de plus $u = 0$ est uniformément attractive alors

$\exists\ \eta^* > 0,\ \forall \epsilon > 0\ \exists\ \sigma\ (\epsilon) > 0$ tel que $u_0 < \eta^*$ et $t \geq t_0 + \sigma \Rightarrow u(t, t_0, u_0) < \bar{a}\ (\epsilon)$.

Soit $\delta(\epsilon) > 0$ tel que $\|(x_0,\ y_0)\| < \delta \Rightarrow V(t_0,\ x_0,\ y_0) < \eta^*$.

Pour $(x_0,\ y_0) \in B_\delta^{p+q}$ et $t \geq t_0 + \sigma$ on a

$\bar{a}\ (\|y(t) - \varphi(t,\ x)\ \| \leq u(t,\ t_0, V(t_0,\ x_0,\ y_0)\ \| < \bar{a}\ (\epsilon)$.

Comme $\bar{a}$ est une fonction de classe $\mathcal{K}$ on obtient la relation

$(x_0, y_0) \in B_\delta^{p+q} \quad t \geq t_0 + \sigma \quad \Rightarrow \|y(t) - \varphi(t,\ x)\| < \epsilon$

Ce qui prouve la stabilité asymptotique uniforme du système (2) relativement à $y - \varphi(t,\ x)$ et par conséquent en vertu du théorème 15 la stabilité asymptotique uniforme du système (2)

Théorème 17 (Kalitine 1995) *On suppose qu'il existe une fonction continue* $\varphi : \mathbb{R}^+ \times U_x \to \mathbb{R}^q,\ \varphi(t, 0) = 0\ \ \forall t \geq 0$ *localement lipshitzienne par rapport à* x *uniformément par rapport à* t *une fonction* V *de classe* C^1 $V : \mathbb{R}^+ \times U \to \mathbb{R}^+,\ V(t, 0, 0) = 0\ \forall t \geq 0$ *et deux fonctions* $\bar{a},\ \bar{b}$ *de classe* $\mathcal{K}$ *tel que* $\forall (t, x, y) \in \mathbb{R}^+ \times U$

1. $\bar{a}\ (\|(y - \varphi(t, x)\|) \leq V(t, x, y) \leq \bar{b}\ (\ \|(y - \varphi(t, x)\ \|)$
2. $\dot{V}(t,\ x,\ y) \leq 0$
3. *la solution* $x = 0$ *du système réduit* $\dot{x} = X(t,\ x, \varphi(t,\ x)),\quad x \in U_x,\quad t \geq 0.$ *est une position d'équilibre uniformément stable pour le système (1).*

Alors l'origine est une position d'équilibre uniformément stable pour le système (2)

Preuve La preuve découle du théorème 16 en prenant comme équation de comparaison $\dot{u} = 0$. Cette éqution admet x=0 comme position d'equilibre uniformément stable.

Théorème 18 (Kalitine 1995) *On suppose qu'il existe une fonction continue* $\varphi : \mathbb{R}^+ \times U_x \to \mathbb{R}^q,\ \varphi(t, 0) = 0\ \ \forall t \geq 0$ *localement lipshitzienne par rapport à* x *uniformément par rapport à* t *une fonction* V *de classe* C^1 $V : \mathbb{R}^+ \times U \to \mathbb{R}^+,\ V(t, 0, 0) = 0\ \forall t \geq 0$ *et des fonctions* $\bar{a},\ \bar{b}$, *barc de classe* $\mathcal{K}$ *tel que*

1. $\bar{a}\ (\|(y - \varphi(t,\ x)\|) \leq V(t, x, y) \leq \bar{b}\ (\|y - \varphi(t,\ x)\|)$
2. $\dot{V}(t,\ x,\ y) \leq -\bar{c}\ (\|(y - \varphi(t,\ x)\|)$
3. $x = 0$ *est une position d'équilibre uniformément asymptotiquement stable pour le système réduit* $\dot{x} = X(t,\ x,\ \varphi(t,\ x)),\quad x\ \in U_x$ *et* $t \geq 0$.

Alors l'origine est une position d'équilibre uniformément stable pour le système réduit.

Preuve La condition (1) du théorème implique

$$\|(y - \varphi(t,\ x)\ \| \geq \bar{b}^{-1}\ ((V(t, x, y))$$

Cette relation combinée avec la condition (2) donne

$$\dot{V}(t,\ x,\ y) \leq 0 \leq -\bar{c}\ \bar{b}^{-1}\ (V(t, x, y))$$

Soit $g(u) = \bar{c}\ \bar{b}^{-1}\ (u)$

L'équation de comparaison $\dot{u} = -g(u)$ est une équation à variables séparables qui admet $u = 0$ comme position d'équilibre asymptotiquement stable.

Ce théorème nous permet de déduire un résultat important pour une classe importante de systemes.

On considère le système (2) dans le cas particulier

$$\begin{cases} \dot{x} = X(t,x,y) \\ \dot{y} = Y(t,y) \end{cases} \tag{30}$$

On suppose que $x = 0$ est une position d'équilibre uniformément asymptotiquement stable pour le système réduit

$$\dot{x} = X(t,x,0)$$

1. Si $y = 0$ est une position d'équilibre uniformément stable alors (x,y) = (0,0) est un point d'équilibre uniformément stable pour le système.
2. Si $y = 0$ est une position d'équilibre uniformément asymptotiquement stable alors (x,y) = (0,0) est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable pour le système.

Références

[1] Barbaschin E.A., Krasovskii N.N. On stability of motion in the large . *Dokl Akad Nauk SSSR* 86, pp. 453-456, 1952.

[2] Lasalle J.P. Some extensions of Lyapunov's method. *IRE Trans. Circuit Theory* CT 7, pp.520-527, 1960.

[3] Bulgakov N.G., Kalitine B.S. A generalization of theorems of Lyapunov's second method.I. *Theory (Russian) Vesci Acad. Nauk BSSR. Ser. Fiz.-Mat.Nauk* 3, pp.32-36, 1978

[4] Bulgakov N.G. The structure of neighborhoods of v-stable stationary points of autonomous differential systems, *Russian Dokl.Acad.Nauk BSSR*, 24, 9, pp. 788-791, 1980

[5] Kalitine B.S. Sur la stabilité des ensembles compacts positivement invariants des systèmes dynamiques. *RAIRO. Automatique/Systems Analysis and Control*, 16, 3, pp.275-286, 1982.

[6] Grudo E. I. Theory of stability of ordinary differential systems and Pfaffian systems. *Differential Equations*, 19, 5, pp. 554-561, 1983.

[7] Kalitine B.S. On the method of Lyapunov functions of constant sign for non autonomous differential systems. *Differential Equations*, 31, 4, pp. 541-548. 1995.

[8] Krasovskii N.N. Certain Problems of the Theory of Stability of Motion. Gos. Izd. Fiz.-mat.Lit. Moscou 1959, English translation : Stability of Motions. Stanford Univ. Press, Stanford (1963).

[9] Barbaschin E.A. Introduction à la théorie de la stabilité, Moscou, Nauka (1967).

[10] Hahn W. Stability of Motion, Springer-Verlag, Berlin (1967).

[11] Rouch N. -Habets P.- Laloy M. Stability theory by Lyapunov's Direct Method, Applied Mathematical Sciences, 22, Springer, New York, Heidelberg, Berlin (1977).