

2 - INTERPOLATION SPLINE

J-P Croisille

Université Paul Verlaine-Metz

Semestre S7, master de mathématiques M1, année 2008/2009



1- INTRODUCTION

Fonctions splines: Fonctions interpolantes particulièrement adaptées.

- ▶ Interpolation *locale* avec des polynômes de bas degré, mais produisant des interpolations locales régulières.
- ▶ **Principe:** 2 paramètres:
 - des points $x_0 < x_1 < \dots < x_n$.
 - un degré de régularité l tel que la spline soit dans $C^{l-1}[a, b]$.
- ▶ En pratique, la spline cubique (qui est C^2) est très utilisée.
- ▶ Problèmes ouverts en théorie de l'interpolation spline en plusieurs dimensions
- ▶ Quelques thèmes classiques: propriétés d'optimalité des splines, zéros des splines.
- ▶ Importance des splines en CAO/CAD. Travaux de Paul de Casteljaou (1910-1999) chez Citroën et de Pierre Bézier (1910-1999) chez Renault: design des pièces automobile.

2- INTERPOLATION POLYNOMIALE PAR MORCEAUX

Idée générale: Il est plus efficace de réaliser une interpolation polynômiale par morceaux, qu'une interpolation globale. Soit $s(x)$, $a \leq x \leq b$, un polynôme défini par morceaux par

$$s(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1 \dots n \quad (1)$$

où les valeurs $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$, $f(x_j)$, $j = 0, 1 \dots n$. Pour \bar{x} , $s(\bar{x})$ est déterminé par quelques valeurs $(x_i, f(x_i))$ avec x_i proche de \bar{x} .

Exemple 1: Interpolation linéaire par morceaux. Pour $x_j \leq x \leq x_{j+1}$,

$$s(x) = f(x_j) + \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} (f(x_{j+1}) - f(x_j)) \quad (2)$$

Erreur: $|f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{8} M_2 h^2$ (cf Théorème B du ch.1). Attention à la terminologie: "linéaire par morceaux" signifie que la fonction est "d'ordre 1", mais l'erreur est d'ordre 2.

Spline cubique: $s(x)$ est un polynôme cubique par morceaux.

$$s(x) = s_j(x)|_{[x_j, x_{j+1}]}, \quad j = 0, 1 \dots n - 1. \quad (3)$$

Sur chaque intervalle, on les relations de collocation

$$s_j(x_j) = f(x_j), \quad s_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1}) \quad (4)$$

Il faut deux autres conditions pour déterminer un polynôme cubique
 $s(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3..$

Méthode 1: On interpole deux valeurs de plus (élargissement du stencil) $(x_{j-1}, f(x_{j-1})), (x_{j+2}, f(x_{j+2}))$, $1 \leq j \leq n - 2$.

Aux extrêmités de l'intervalle, on interpole

- ▶ $f(x_2), f(x_3)$ pour le point $j = 0$
- ▶ $f(x_{n-2}), f(x_{n-3})$ pour le point $j = n - 1$.

Méthode 2: On interpole de plus les dérivées en $(x_j, s'(x_j)), (x_{j+1}, s'(x_{j+1}))$. On réalise donc une interpolation de type Hermite. Les valeurs $s'(x_j)$ sont des valeurs approchées de la dérivée, évaluées par ailleurs. On a

$$s_j(x) = f(x_j) + s'(x_j)(x - x_j) + c_2(x - x_j)^2 + c_3(x - x_j)^3 \quad (5)$$

Le système linéaire de 2 équations à 2 inconnues

$$\begin{cases} s_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1}) \\ s'_j(x_{j+1}) = s'(x_{j+1}) \end{cases} \quad (6)$$

donne la solution

$$\begin{cases} c_2 = \frac{3(f(x_{j+1}) - f(x_j))}{(x_{j+1} - x_j)^2} - \frac{2s'(x_j) + s'(x_{j+1})}{x_{j+1} - x_j} \\ c_3 = \frac{2(f(x_j) - f(x_{j+1}))}{(x_{j+1} - x_j)^3} + \frac{s'(x_j) + s'(x_{j+1})}{(x_{j+1} - x_j)^2} \end{cases} \quad (7)$$

Pour la méthode 1, en appliquant le Théorème B du Ch.1, on obtient une erreur d'ordre 4

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{24} \prod_{i=j-1}^{j+2} |x - x_i| \max_{x_{j-1} \leq \xi \leq x_{j+2}} |f^{(4)}(\xi)| \quad (8)$$

Méthode 3: Spline cubique On effectue une interpolation par morceaux, de sorte que s'' , $a \leq x \leq b$ soit continue. Sur $[x_j, x_{j+1}]$, on a

$$s_j(x) = f(x_j) + s'(x_j)(x - x_j) + c_2(x - x_j)^2 + c_3(x - x_j)^3 \quad (9)$$

donc

$$s''(x) = 2c_2 + 6c_3(x_{j+1} - x_j) \quad (10)$$

$$= 6 \frac{f(x_j) - f(x_{j+1})}{(x_{j+1} - x_j)^2} + \frac{2s'(x_j) + 4s'(x_{j+1})}{x_{j+1} - x_j} \quad (11)$$

Ceci doit être identique à $s''_{j+1}(x_{j+1})$ On obtient l'équation

$$\frac{s'(x_{k-1}) + 2s'(x_k)}{x_k - x_{k+1}} + \frac{2s'(x_k) + s'(x_{k+1})}{x_{k+1} - x_k} = \quad (12)$$

$$3 \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{(x_k - x_{k-1})^2} + 3 \frac{f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})}{(x_{k+1} - x_k)^2} \quad (13)$$

La dépendance de $s_j(x) = s_{|[x_j, x_{j+1}]}$ est non locale.

Dans le cas où $x_{k+1} = x_k + h$, ceci devient pour $1 \leq k \leq n - 1$

$$s'(x_{k-1}) + 4s'(x_k) + s'(x_{k+1}) = \frac{3}{h}(f(x_{k+1}) - f(x_k)) \quad (14)$$

Il faut fixer $s'(x_0)$, $s'(x_n)$ par une procédure indépendante, par exemple

$$s'(x_0) \simeq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}, \quad s'(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{h} \quad (15)$$

On obtient un système linéaire en les inconnues $s'(x_j)$, $j = 0, \dots, n$, qui donne après résolution $s'(x_j)$ en fonction de $f(x_j)$, ce qui permet ensuite de calculer $s(x)$ sur chaque $[x_j, x_{j+1}]$.

2- SPLINES

Espace des splines: $\Omega_n = (x_\nu)_{\nu=1, \dots, n}$ avec

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad (16)$$

réalise une partition d'un intervalle $[a, b]$. L'espace $\mathcal{S}_l(x_0, x_1, \dots, x_n)$ des splines polynômiales de degré l est l'espace vectoriel des fonctions $s(x) \in \text{Vect}(1, x, \dots, x^l, (x - x_1)_+^l, \dots, (x - x_{n-1})_+^l)$, c-a-d.

$$s(x) = \sum_{\lambda=0}^l a_\lambda x^\lambda + \sum_{\nu=1}^{n-1} b_\nu (x - x_\nu)_+^l \quad (17)$$

On a $\dim \mathcal{S}_l = n + l$. Les fonctions

$$q_{l,\nu}(x) = (x - x_\nu)_+^l = \begin{cases} (x - x_\nu)^l, & x \geq x_\nu \\ 0 & \end{cases} \quad (18)$$

sont dans $C^{l-1}[a, b]$ et

$$\dim \mathcal{S}_l = \underbrace{\dim P_l(a, b)}_{l+1} + \underbrace{\dim \text{Vect}((x - x_\nu)_+^l)}_{n-1} = l + 1 + n - 1 = n + l \quad (19)$$

Les fonctions $(x - x_\nu)_+^l$ permettent d'assurer un raccord C^{l-1} aux points x_ν des différents morceaux de polynômes.

Theorème A (définition des splines)

L'espace des splines $S_l(x_0, x_1, \dots, x_n)$ est exactement l'espace S_l des fonctions $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

- ▶ $s \in C^{l-1}[a, b]$
- ▶ $s \in \mathcal{P}_l[x_\nu, x_{\nu+1}]$

Démonstration:

On montre que toute fonction $s \in S_l$ possède une représentation de la forme

$$s(x) = \sum_{\lambda=0}^l a_\lambda x^\lambda + \sum_{\nu=1}^{n-1} b_\nu (x - x_\nu)_+^l \quad (20)$$

c-a-d., que $\text{Vect}(x^\lambda, (x - x_\nu)_+^l)$ est génératrice pour S_l .

Soit $s(x) \in S_l$. Montrons par récurrence la propriété (P_k) suivante:
 (P_k) : Il existe b_1, \dots, b_{k-1} t.q.

$$s(x) = \sum_{\lambda=0}^l a_\lambda x^\lambda + \sum_{\nu=1}^{k-1} b_\nu (x - x_\nu)_+^l, \quad \text{sur } [x_0, x_k] \quad (21)$$

• $k = 1$. On regarde $s(x)$ sur $[x_0, x_1]$. C'est un polynôme de degré l , donc

$$s(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_l x^l \quad (22)$$

Donc (21) est vrai pour $k = 1$.

- $(P_k) \Rightarrow (P_{k+1})$ Soit

$$\rho(x) = s(x) - \sum_{\lambda=0}^l a_\lambda x^\lambda - \sum_{\nu=0}^{k-1} b_\nu (x - x_\nu)_+^l \quad (23)$$

On a $\rho(x) \in C^{l-1}[x_0, x_{k+1}]$ et $\rho(x) \equiv 0$ sur $[x_0, x_k]$, par hypothèse de récurrence. De plus $\rho(x)$ est solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y^{(l+1)}(x) = 0, & x_k \leq x \leq x_{k+1} \\ y(x_k) = y'(x_k) = \dots = y^{(l-1)}(x_k) = 0 \end{cases} \quad (24)$$

(24) est une e.do. linéaire en l'inconnue

$$x \mapsto Y(x) = [y(x), y'(x), \dots, y^{(l)}(x)]^T \in \mathbb{R}^{l+1} \quad (25)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} Y(x) = AY(x) \\ Y(x_k) = [0, \dots, \alpha]^T \end{cases} \quad (26)$$

Solution unique $\rho(x) = \frac{\alpha}{l!} (x - x_k)_+^l$. En notant $b_k = -\alpha/l!$, $s(x)$ s'écrit sur $[x_k, x_{k+1}]$

$$s(x) = \sum_{\lambda=0}^l a_\lambda x^\lambda + \sum_{\nu=1}^k b_\nu (x - x_\nu)_+^l \quad (27)$$

ce qui prouve $(P_k) \Rightarrow (P_{k+1})$. On a donc montré que la famille de fonctions $(x^\lambda, (x - x_\nu)_+^l)$ est génératrice pour S_l , c-a-d, $S_l \subset \mathcal{S}_l(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Réciproquement toute spline $s \in \mathcal{S}_l(x_0, \dots, x_n)$ est dans $\mathcal{P}_l[x_\nu, x_{\nu+1}]$ pour tout ν et est dans $C^{l-1}[a, b]$, donc $\mathcal{S}_l(x_0, \dots, x_n) \subset S_l$. Donc $S_l = \mathcal{S}_l(x_0, \dots, x_n)$.

Conditions de bord pour les splines: On a vu que la spline cubique $s(x) \in \mathcal{S}_3(x_0, x_1, \dots, x_n)$ est déterminée par les valeurs des dérivées aux noeuds $s'(x_j)$ solution du système linéaire

$$s'(x_{k-1}) + 4s'(x_k) + s'(x_{k+1}) = \frac{3}{h}(f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})), \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (28)$$

Il faut rajouter 2 conditions de bord en $a = x_0$ et $b = x_n$. Trois types de conditions de bord sont usuelles

- ▶ Les conditions de Hermite

$$s'(a) = f'(a), \quad s'(b) = f'(b) \quad (29)$$

Cela suppose que $f'(a), f'(b)$ sont connues par ailleurs

- ▶ Les conditions “naturelles”

$$s''(a) = s''(b) = 0 \quad (30)$$

- ▶ Les conditions périodiques

$$s'(a) = s'(b), \quad s''(a) = s''(b) \quad (31)$$

Theorème B (relation intégrale pour les splines cubiques)

Soit $d(x) = f(x) - s(x)$, l'erreur entre la fonction $f(x)$ et la spline $s(x)$.
On a la condition limite

$$s''(a)d'(a) = s''(b)d'(b) \quad (32)$$

pour la spline cubique $s(x)$ si et seulement si on a la relation intégrale

$$\int_a^b f''(x)^2 dx = \int_a^b (f''(x) - s''(x))^2 dx + \int_a^b s''(x)^2 dx \quad (33)$$

Démonstration:

La relation intégrale (33) équivaut à

$$\int_a^b (f''(x)s''(x) - s''(x)^2) dx = 0 \quad (34)$$

soit

$$\int_a^b s''(x)d''(x) dx = 0 \quad (35)$$

En intégrant deux fois par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b s''(x)d''(x)dx &= s''d'|_a^b - \int_a^b s'''(x)d'(x)dx \\ &= s''(b)d'(b) - s''(a)d'(a) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} s'''(x)d'(x)dx \\ &= s''(b)d'(b) - s''(a)d'(a) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \left(\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} s^{(4)}(x)d(x)dx - s^{(3)}(x)d(x)|_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \right) \end{aligned}$$

Mais on a

- ▶ $d(x_\nu) = 0$, donc $s^{(3)}(x)d(x)|_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} = 0$.
- ▶ $s^{(4)}(x)|_{[x_{\nu-1}, x_\nu]} \equiv 0$ car $s(x) \in P_3[a, b]$.

On a finalement

$$\int_a^b s''(x)d''(x)dx = s''(b)d''(b) - s''(a)d''(a) \quad (36)$$

ce qui donne le résultat. ■

Chacune des 3 conditions de bord

- ▶ Hermite
- ▶ Naturelle
- ▶ Périodique

vérifie cette relation.

Corollaire (Interprétation mécanique de la spline cubique)

Soit $s(x) \in \mathcal{S}_3(x_0, x_1, \dots, x_n)$, la spline cubique interpolant $f(x) \in C^2[a, b]$. Alors $s(x)$ est la solution du problème de minimisation

$$\min_{g \in \mathcal{G}} \int_a^b g''(x)^2 dx \quad (37)$$

où \mathcal{G} est l'ensemble des fonctions $C^2[a, b]$ vérifiant les mêmes conditions d'interpolation que $s(x)$

- ▶ $g(x_\nu) = f(x_\nu), \nu = 0, 1, \dots, n$
- ▶ l'une des trois conditions limite

Démonstration:

La relation (33) est valable non seulement pour f , mais aussi avec toute fonction $g \in \mathcal{G}$. Donc

$$\int_a^b (g''(x))^2 dx = \int_a^b (g''(x) - s''(x))^2 dx + \int_a^b s''(x)^2 dx \quad (38)$$

$$\geq \int_a^b s''(x)^2 dx \quad (39)$$

$$(40)$$

donc

$$\min_{g \in \mathcal{G}} \int_a^b g''(x)^2 dx = \int_a^b s''(x)^2 dx \quad (41)$$

Corollaire

Le problème (M) possède une unique solution. Autrement dit, il existe une unique spline cubique $s(x) \in S_3[a, b]$ solution du problème d'interpolation (avec l'un des trois choix de conditions limite).

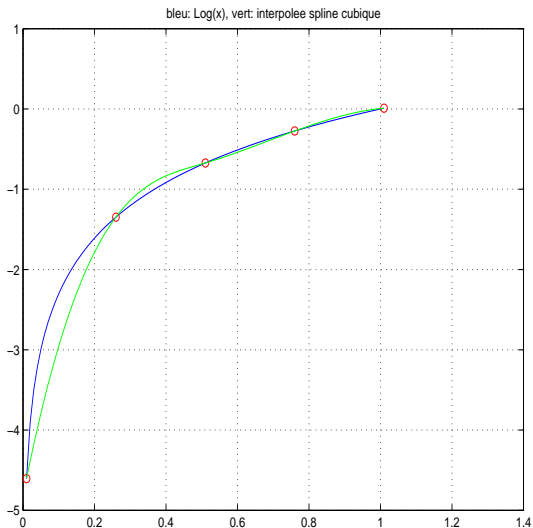
Démonstration:

Si $s_1(x), s_2(x) \in \mathcal{G}$ alors

$$\int_a^b (s_1''(x) - s_2''(x))^2 dx = 0 \quad (42)$$

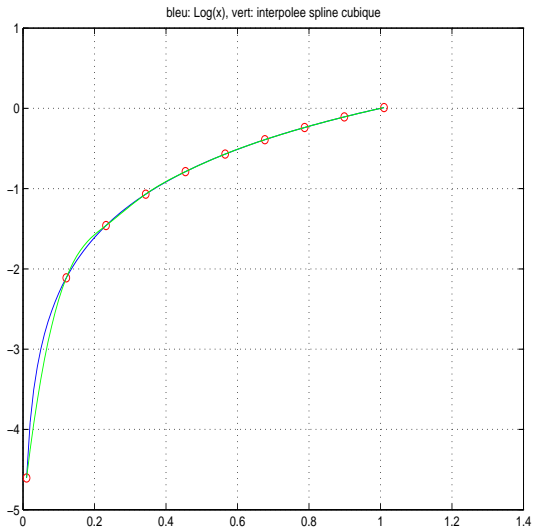
Donc $s_1''(x) = s_2''(x)$, ce qui entraîne que s_1 et s_2 diffèrent par une fonction affine. Les conditions limite entraînent que $s_1 \equiv s_2$.

Exemples:



Interpolation spline avec 4 points de:

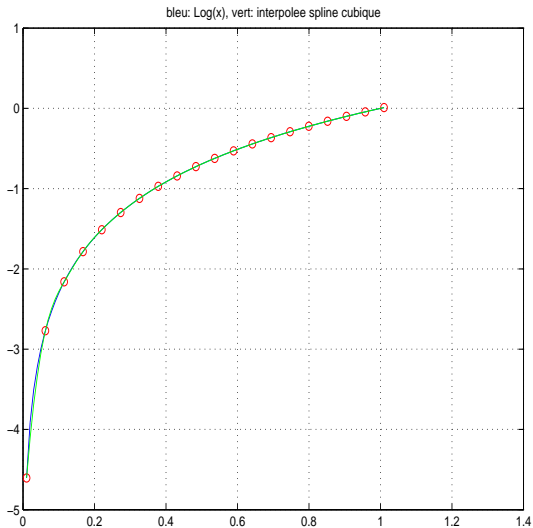
$$x \in [0.01, 1.01] \mapsto \text{Log}(x)$$



Interpolation spline avec 10 points de:

$$x \in [0.01, 1.01] \mapsto \text{Log}(x)$$

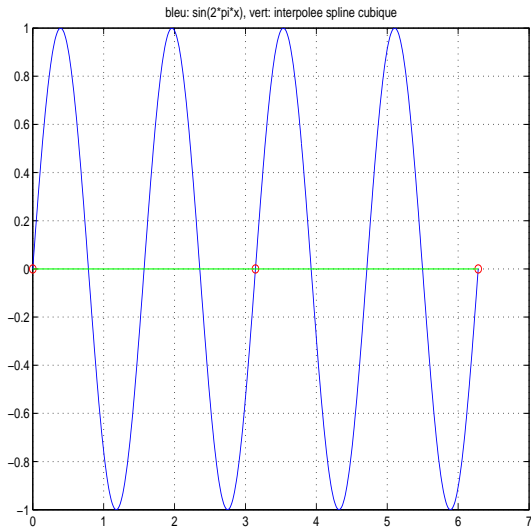
(44)



Interpolation spline avec 20 points de:

$$x \in [0.01, 1.01] \mapsto \text{Log}(x)$$

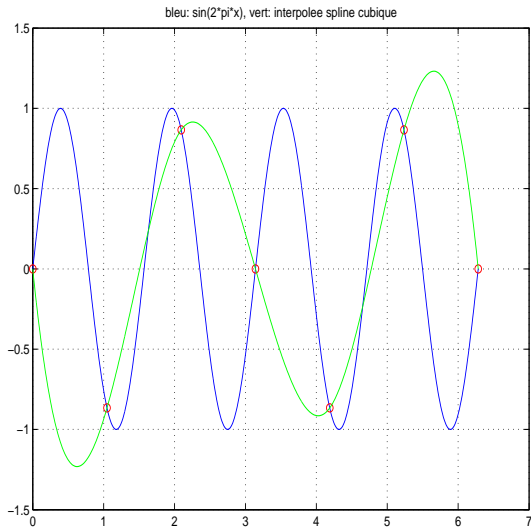
(45)



Interpolation spline avec 3 points de:

$$x \in [0., 2\pi] \mapsto \sin(4x)$$

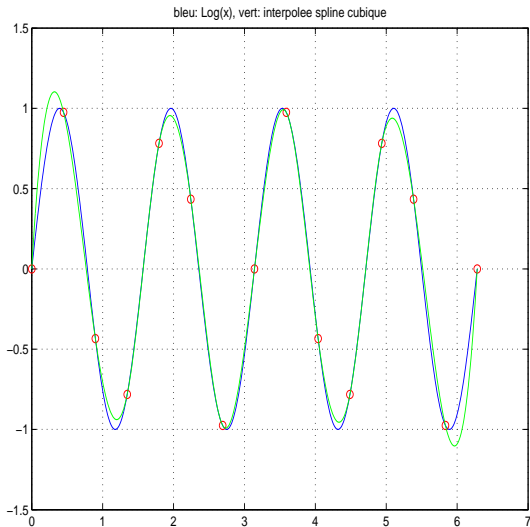
(46)



Interpolation spline avec 7 points de:

$$x \in [0., 2\pi] \mapsto \sin(4x)$$

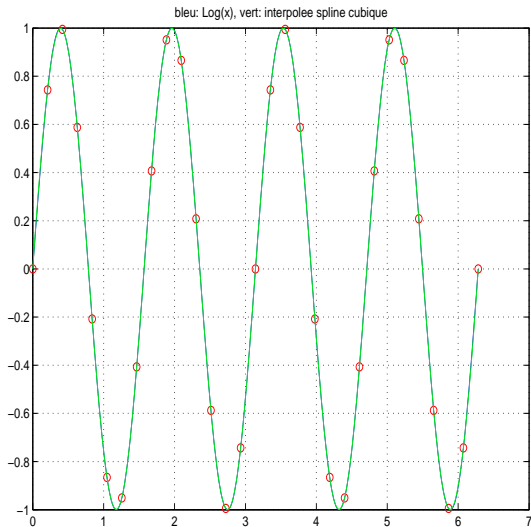
(47)



Interpolation spline avec 15 points de:

$$x \in [0., 2\pi] \mapsto \sin(4x)$$

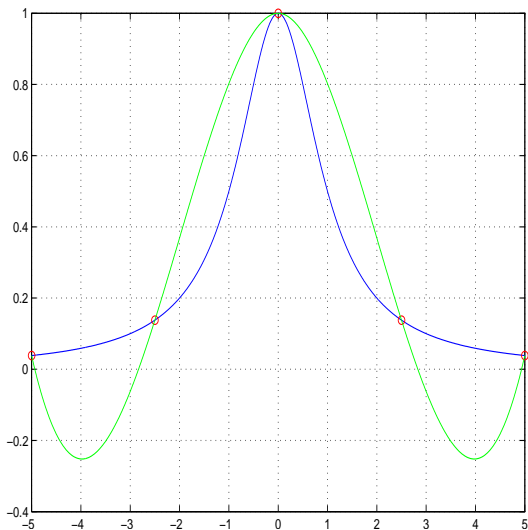
(48)



Interpolation spline avec 31 points de:

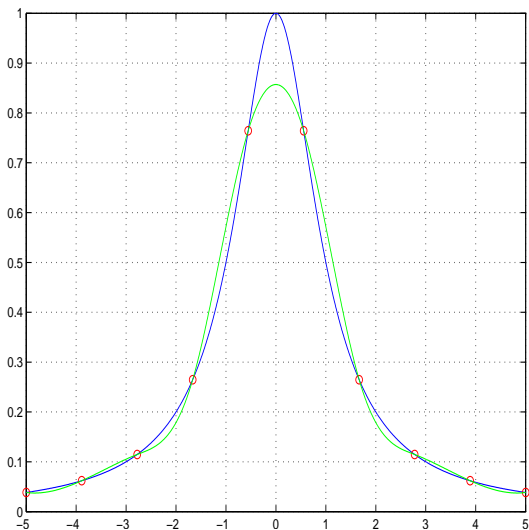
$$x \in [0., 2\pi] \mapsto \sin(4x)$$

(49)



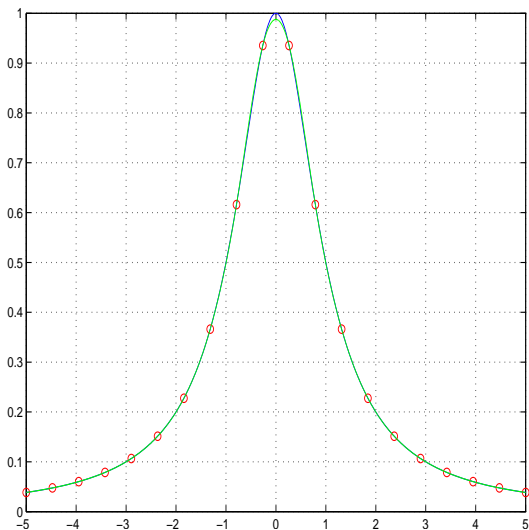
Interpolation spline avec 5 points de la fonction de Runge:

$$x \in [-5, 5] \mapsto \frac{1}{1+x^2} \quad (50)$$



Interpolation spline avec 10 points de la fonction de Runge:

$$x \in [-5, 5] \mapsto \frac{1}{1+x^2} \quad (51)$$



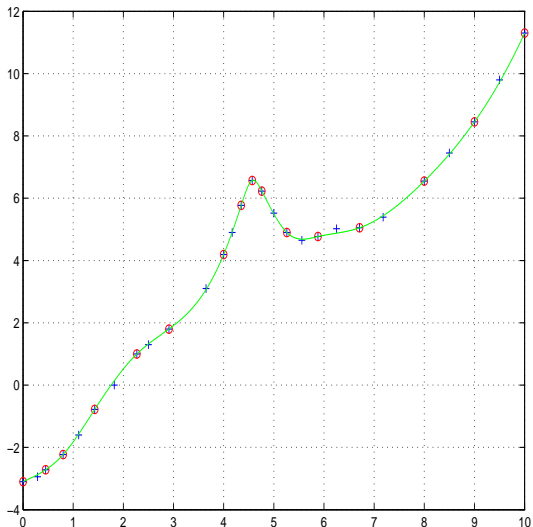
Interpolation spline avec 20 points de la fonction de Runge:

$$x \in [-5, 5] \mapsto \frac{1}{1+x^2} \quad (52)$$

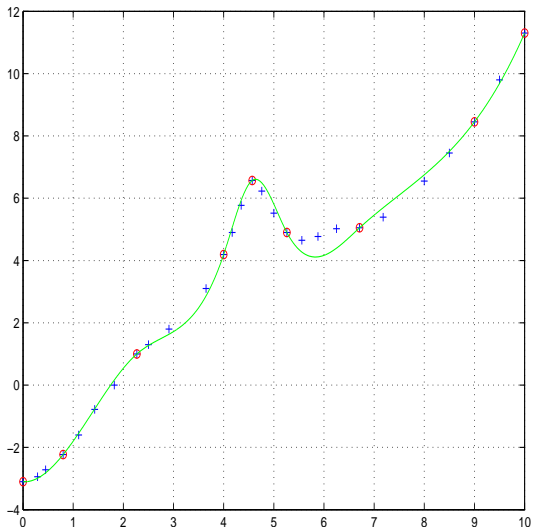
Tableau de mesures

ν	$E(\nu)$	ν	$E(\nu)$	ν	$E(\nu)$
>0.00	-3.10	3.65	3.10	>5.88	4.77
0.29	-2.94	>4.00	4.19	6.25	5.02
>0.45	-2.72	4.17	4.90	>6.71	5.05
>0.80	-2.23	>4.35	5.77	7.18	5.39
1.11	-1.60	>4.57	6.57	>8.00	6.55
>1.43	-0.78	>4.76	6.23	8.50	7.45
1.82	0.00	5.00	5.52	>9.00	8.45
>2.27	1.00	>5.26	4.90	9.50	9.80
2.50	1.30	5.56	4.65	>10.00	11.30
>2.91	1.80				

On calcule l'interpolé spline (cubique) basée sur les points marqués > et on compare pour les autres points valeur mesurée/valeur prédite par la spline.



Interpolation spline avec les mesures marquées \times , (15 mesures).



Interpolation spline avec seulement 9 mesures .