Algèbre 2

Devoir No 6

Exercice 1

Montrer qu'un endomorphisme u de E est diagonalisable si et seulement si le polynôme minimal s'écrit: $q_u = \prod_{\lambda \in \sigma(u)}(X-\lambda)$ de u.

Exercice 2

Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$$

est diagonalisable et calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

Montrer que la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

est diagonalisable

Exercice 4

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C}).$$

Montrer que les vecteurs $\xi_j = (1, i^j, i^{2j}, i^{3j}), j = 0, 1, 2, 3$, forment une base de $\mathbb{C}^4$ constituée de vecteurs propres de de u_A.

Exercice 5

Trouver les espaces propres et les espaces caractéristiques des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & -7 & 3 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \\ -3 & 3 & 4 & 1 \\ -6 & 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 & 1 \\ -3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -3 & -1 \\ 2 & -5 & -7 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & 0 \\ -4 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 0 & -2 \\ 5 & -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

Jordaniser les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 & -2 \\ -2 & -5 & 1 & -2 \\ -6 & -13 & 5 & -7 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & -8 & 1 & -5 \\ -6 & -12 & 5 & -6 \\ 2 & 10 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$