

# Le théorème de Jordan

## 1 Le Théorème de Cayley-Hamilton.

**Définition 1.1.** Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie. Nous appelons *polynôme caractéristique* de  $u$  le polynôme

$$P_u(X) = \det(M - X \cdot \mathbb{I}_n).$$

Ici  $M = M^{BB}(u)$  est la matrice de  $u$  dans la base  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  de  $E$ . Si  $C$  est une autre base, alors

$$M^{CC}(u) = M^{CB}(\mathbb{I}_E) \cdot M^{BB}(u) \cdot M^{CB}(u)^{-1} = U \cdot A \cdot U^{-1}$$

et donc

$$\begin{aligned} & \det(M^{CC}(u) - X \cdot \mathbb{I}_n) \\ &= \det(M^{CB}(\mathbb{I}_E) \cdot M^{BB}(u) \cdot M^{CB}(u)^{-1} - X \cdot \mathbb{I}_n) \\ &= \det(M^{CB}(\mathbb{I}_E) \cdot (M^{BB}(u) - X \cdot \mathbb{I}_n) \cdot M^{CB}(\mathbb{I}_E)^{-1}) \\ &= \det(M^{CB}(\mathbb{I}_E)) P_u(X) \det(M^{CB}(\mathbb{I}_E))^{-1} = P_u(X). \end{aligned}$$

Ainsi le polynôme  $P_u$  est indépendant de la base choisie. Ecrivons

$$a_{ij} = M(i, j),$$

$$a_{ij}(X) = (M^{BB}(u) - X \cdot \mathbb{I}_n)(i, j), \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Alors  $a_{ii}(X) = a_{ii} - X$ ,  $1 \leq i \leq n$ , et

$$\begin{aligned} P_u(X) &= \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1}(X) \cdots a_{\sigma(n)n}(X) \\ &= \prod_{i=1}^n (a_{ii} - X) + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq \mathbb{I}}} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1}(X) \cdots a_{\sigma(n)n}(X). \end{aligned}$$

Le deuxième terme est de degré  $\leq n - 2$  en  $X$ , car  $\sigma(i) \neq i$  pour au moins deux indices  $i$  si  $\sigma \neq \mathbb{I}$  et donc

$$\begin{aligned} P_u(X) &= (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \left( \sum_{i=1}^n a_{ii} \right) X^{n-1} + (\dots) X^{n-2} + \dots \\ &= (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \text{trace}(u) + \sum_{i=n-2}^1 (-1)^i p_i X^i + \det(u). \end{aligned}$$

**Théorème 1.2.** (Caley-Hamilton) Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie,  $u$  un endomorphisme de  $E$ ,  $P_u$  son polynôme caractéristique et  $Q_u$  le polynôme minimal de  $u$ . Alors

$$P_u(u) = 0.$$

En particulier,  $Q_u$  divise  $P_u$  et  $\deg Q_u \leq \dim(E)$ .

*Démonstration.* Soit  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  une base de  $E$   $A = (a_{ij})$  la matrice de  $u$  dans  $B$ . Soit  $A(X) = A - X\mathbb{I}_n$  et soit  $B(X) = ((-1)^{i+j} \det((A - X \cdot \mathbb{I}_n)_{ji}))$  la co-matrice de  $A(X)$ . Alors

$$A(X) \cdot B(X) = B(X) \cdot A(X) = \det(A(X))\mathbb{I}_n$$

et donc

$$\sum_{k=1}^n B(X)(k, j)A(i, k)(X) = P_u(X)\delta_{ij}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Remplaçons dans ces identités polynomiales le symbole  $X$  par l'endomorphisme  $u$ . Alors

$$\sum_{k=1}^n B(u)(k, j)A(i, k)(u) = \delta_{ij}P_u(u), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Appliquons ces endomorphismes aux vecteurs  $b_i$  de la base  $B$  et sommons sur  $i$  :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n B(u)(k, j)A(u)(i, k)b_i = \sum_{i=1}^n \delta_{ij}P_u(u)b_i, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Ceci implique que

$$\sum_{k=1}^n B(u)(k, j) \sum_{i=1}^n A(u)(i, k)b_i = P_u(u)b_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Comme

$$A(u)(i, k) = (a_{i,k} - \delta_{ik}X)(u) = a_{i,k}\mathbb{I}_E - \delta_{ik}u$$

nous voyons que

$$\sum_{i=1}^n A(u)(i, k)b_i = \sum_{i=1}^n a_{i,k}b_i - u(b_k) = 0$$

pour tout  $k$ . Finalement

$$\begin{aligned} P_u(u)b_j &= \left( \sum_{k=1}^n B(u)(k, j) \right) \sum_{i=1}^n A(u)(i, k)b_i \\ &= \left( \sum_{k=1}^n B(u)(k, j) \right) 0 = 0 \end{aligned}$$

pour tout  $j$  et donc

$$P_u(u) = 0.$$

□

## 2 Les matrices nilpotentes.

**Définition 2.1.** Soit  $A$  un anneau. Un élément  $a$  de  $A$  est dit *nilpotent* si  $a^n = 0$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ . Le *degré de nilpotence* de  $a$  est le plus petit entier  $d(a) > 0$ , tel que  $a^{d(a)} = 0$ .

**Proposition 2.2.** Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel et soit  $u \in L(E)$ . Soit  $x \in E$  tel que  $u^n(x) = 0$ ,  $u^{n-1}(x) \neq 0$ . Alors la famille  $\{u^0(x) = x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\}$  est libre.

*Démonstration.* Supposons que

$$\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j u^j(x) = 0.$$

Alors

$$0 = u^k(0) = u^k\left(\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j u^j(x)\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j u^{j+k}(x).$$

Pour  $k = n - 1$  on voit que  $u^{j+n-1}(x) = 0$  pour  $j > 0$  et ainsi

$$0 = \lambda_0 u^{n-1}(x) + 0,$$

ce qui implique que  $\lambda_0 = 0$ . Par récurrence sur  $l \geq 0$  on suppose que  $\lambda_i = 0, i = 0, \dots, l$ , et alors pour  $k = n - 2 - l$  on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j u^{j+k}(x) = \sum_{j=l+1}^{n-1} \lambda_j u^{j+n-2-l}(x) \\ &= \lambda_{l+1} u^{n-1}(x) + \sum_{j=l+2}^{n-1} \lambda_j u^{(j-2-l)+n}(x) = \lambda_{l+1} u^{n-1}(x). \end{aligned}$$

Ainsi  $\lambda_{l+1} = 0$  et donc  $\lambda_i = 0$  pour tout  $i$ . □

**Corollaire 2.3.** Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie, et soit  $u \in L(E)$  un élément nilpotent. Alors le degré de nilpotence de  $u$  est inférieur ou égal à  $\dim(E)$ . En particulier, si  $u^j(x) = 0$  pour un  $j > \dim(E)$ , alors déjà  $u^{\dim(E)}(x) = 0$  ( $x \in E$ ).

*Démonstration.* En effet, prenons un  $v \in E$ , tel que  $u^{d(u)-1}(v) \neq 0$ . Alors la famille  $\{u^0(x), \dots, u^{d(u)-1}(x)\}$  est libre et donc le cardinal  $d(u)$  de cette famille  $\leq \dim(E)$ . □

**Définition 2.4.** 1. Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie, soit  $u \in L(E)$  et soit  $F \subset E$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Nous disons que  $F$  est  $u$ -invariant si  $u(x) \in F$  pour tout  $x \in F$ .

2. Nous disons que le sous-espace  $u$ -invariant  $F$  de  $E$  est  $u$ -cyclique, s'il existe un vecteur  $x_0 \in F$ , tel que  $F = \text{vec}(\{u^j(x_0), j \in \mathbb{N}\})$ .

**Théorème 2.5.** Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit  $u \in L(E)$  un endomorphisme nilpotent de degré de nilpotence  $d = d(u)$ . Il existe une base  $\mathcal{B} = \{b_1^i, i = 1, \dots, d_j, j = 1, \dots, N, \}$  de  $E$ , telle que  $u(b_i^j) = b_{i-1}^j, i = d_j, \dots, 2, u(b_1^j) = 0, j \in J$ . En particulier  $\{b_1^j, j = 1, \dots, N\}$  est une base du noyau de  $u$  et le degré de nilpotence  $d$  de  $u$  est gal au maximum des nombres  $d_j, j = 1, \dots, N$ .

*Démonstration.* Faisons une récurrence sur  $\dim(E)$ . Si  $E$  est de dimension 1, alors  $u = 0$  et donc  $J = \{1\}$ , tout vecteur non nul  $u_1^1$  de  $E$  convient pour faire la base  $\mathcal{B}$ . Supposons le théorème établi

pour tout  $K$ -espace vectoriel de dimension  $< n$  et soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $u \in L(E)$  nilpotent. Considérons  $E' = \text{im}(u)$  et  $u' = u|_{E'}$ . Comme  $u$  est nilpotent, son noyau est non nul, car  $\text{im}(u^{d(u)-1}) \subset \ker(u)$ . Donc  $n' := \dim(E') = \dim(E) - \dim(\ker(u)) < n$ . Nous avons

que  $\ker(u') = \ker(u) \cap E'$  et que  $\text{im}(u'^k) = \text{im}(u^{k+1})$  pour tout  $k$ . Soit  $J' = \{j \in J; b_1^j \in \text{im}(u)\}$ . Alors d'après l'hypothèse de récurrence pour  $(E', u')$  et pour  $\mathcal{B}'_1 = \mathcal{B}_1 \cap \text{im}(u) = \{b_1^j, j \in J'\}$ , la

famille  $\mathcal{B}' = \bigcup_{j \in J'} \mathcal{B}'^j$ , où  $\mathcal{B}'^j = \{b_{d_j-1}^j, \dots, b_1^j\}$ , est une base de  $E'$ .

Montrons que  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ . Par construction, nous savons déjà que

$$u(b_i^j) = b_{i-1}^j, 1 < i \leq d_j, u(b_1^j) = 0; j \in J.$$

Soit  $x \in E$ . Alors

$$u(x) = \sum_{j \in J'} \sum_{i=1}^{d_j-1} \mu_i^j b_i^j.$$

Soit

$$y = \sum_{j \in J'} \sum_{i=1}^{d_j-1} \mu_i^j b_{i+1}^j.$$

Alors

$$\begin{aligned} u(x - y) &= \sum_{j \in J'} \sum_{i=1}^{d_j-1} \mu_i^j b_i^j - u(y) \\ &= \sum_{j \in J'} \sum_{i=1}^{d_j-1} \mu_i^j b_i^j - \sum_{j \in J'} \sum_{i=1}^{d_j-1} \mu_i^j b_i^j = 0. \end{aligned}$$

Donc  $\ker(u) \ni x - y = \sum_{j \in J} \mu_1^j b_1^j$  et

$$x = \sum_{j \in J'} \sum_{i=2}^{d_j} \mu_i^j b_i^j + \sum_{j \in J} \mu_1^j b_1^j.$$

Ainsi  $\mathcal{B}$  est une partie génératrice de  $E$ . Supposons que

$$0 = \sum_{j \in J} \sum_{i=1}^{d_j} \lambda_1^j b_i^j$$

pour certains scalaires  $\lambda_i^j$ . Alors

$$0 = u\left(\sum_{j \in J} \sum_{i=1}^{d_j} \lambda_1^j b_i^j\right) = \sum_{j \in J'} \sum_{i=2}^{d_j} \lambda_1^j b_{i-1}^j.$$

Comme les vecteurs  $b_{i-1}^j$ ,  $j \in J'$ ,  $i = 1, \dots, d_j - 1$ , sont dans  $\mathcal{B}'$ , on a que

$$\lambda_i^j = 0, \quad j \in J', i = 2, \dots, d_j.$$

Il nous reste la relation

$$0 = \sum_{j \in J} \lambda_1^j b_1^j.$$

Le fait que les  $b_1^j$ ,  $j \in J$ , forment une base de  $\ker(u)$  forcent les  $\lambda_1^j$ ,  $j \in J$ , à être aussi 0. Donc  $\mathcal{B}$  est une partie libre et finalement  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ . □

**Corollaire 2.6.** Soit  $A \in M_n(K)$  une matrice nilpotente. Alors

$$A = U \cdot \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_N \end{pmatrix} \cdot U^{-1},$$

où pour une certaine matrice inversible  $U \in M_n(K)$ , pour  $j = 1, \dots, N$ ,

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

*Démonstration.* Soit  $u = u_A$  l'endomorphisme de  $K^n$  défini par

$$u(X) = X \cdot A^t, \quad X \in K^n.$$

Comme  $A$  est nilpotente,  $u$  l'est aussi et donc il existe une base de Jordan  $B$  pour  $u$  avec les propriétés du théorème 2.5. La matrice  $N = M^{BB}(u)$  a alors la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_N \end{pmatrix}$$

de la proposition. La matrice de passage  $U = M^{\mathcal{E}B}(\mathbb{I})$  de  $B$  à la base canonique  $\mathcal{E}$  a comme colonnes les coordonnées des vecteurs  $b_i^j$  et en outre

$$A = M^{\mathcal{E}\mathcal{E}}(u_A) = M^{\mathcal{E}B}(\mathbb{I})M^{BB}(u_A)M^{B\mathcal{E}}(\mathbb{I}) = U \cdot N \cdot U^{-1}.$$

□

### 3 Les espaces caractéristiques

**Définition 3.1.** Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$ . On dit qu'un élément  $x$  non nul de  $E$  est un *vecteur propre*, s'il existe  $\lambda \in K$ , tel que

$$u(x) = \lambda \cdot x.$$

Ce scalaire  $\lambda$  est appelé *valeur propre* de  $u$ . Nous écrivons

$$\sigma(u) = \sigma_K(u)$$

et nous appelons *spectre* de  $u$  l'ensemble des valeurs propres de  $u$ .

**Proposition 3.2.** Soit  $u \in L(E)$  et supposons  $\dim E < \infty$ . Alors

$$\sigma(u) = \{\lambda \in K; \det(u - \lambda \cdot \mathbb{I}_E) = 0\}.$$

En particulier,  $\#\sigma(u) \leq \dim(E)$ .

*Démonstration.* En effet

$$\begin{aligned} \sigma(u) &= \{\lambda \in K; \ker(u - \lambda \cdot \mathbb{I}_E) \neq \{0\}\} \\ &= \{\lambda \in K; u - \lambda \cdot \mathbb{I}_E \text{ n'est pas inversible}\} \\ &= \{\lambda \in K; \det(u - \lambda \cdot \mathbb{I}_E) = 0\}. \end{aligned}$$

Comme la fonction polynôme  $\lambda \mapsto \det(u - \lambda \mathbb{I}_E)$  est de degré  $n$ , on voit que

$$\#\sigma(u) = \text{nombre de racines de } u \leq \dim(E).$$

□

**Définition 3.3.** Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $K$ - espace vectoriel  $E$ . Soit  $\lambda \in \sigma(u)$ .

1. Nous appelons *espace propre* de  $u$  (pour la valeur propre  $\lambda$ ) le sous-espace

$$E_\lambda(u) = E_\lambda = \{x \in E; u(x) = \lambda \cdot x\}$$

Il est clair que  $E_\lambda$  est constitué des vecteurs propres de  $u$  et de 0.

2. Nous appelons sous-espace *caractéristique* de  $u$  (pour la valeur propre  $\lambda$ ) et nous notons  $N_u(\lambda)$  le sous-espace

$$N_\lambda(u) = N_\lambda = \ker((u - \lambda\mathbb{I})^{\dim(E)}).$$

Il est clair que

$$N_\lambda = \bigcup_{i=1}^{\dim(E)} \ker((u - \lambda\mathbb{I})^i),$$

car

$$\ker((u - \lambda\mathbb{I}_E)^i) \subset \ker((u - \lambda\mathbb{I})^{\dim(E)})$$

pour  $i \leq \dim(E)$  et

$$\ker((u - \lambda\mathbb{I})^{\dim(E)}) = \ker((u - \lambda\mathbb{I})^j)$$

pour tout  $j > \dim(E)$ .

**Définition 3.4.** Soit  $A$  une algèbre unitaire sur  $K$ . Soit  $a \in A$ . L'idéal

$$I_a = \{P \in K[X]; P(a) = 0\}$$

est principal d'après (18 chapitre sur les polynômes). Le polynôme unitaire qui engendre  $I_a$  est appelé polynôme *minimal* de  $a$  et sera noté  $Q_a$ .

Ainsi

$$I_a = K[X] \cdot Q_a.$$

**Proposition 3.5.** Si  $A$  est de dimension finie, alors le polynôme minimal d'un élément  $a$  de  $A$  est de degré  $\leq \dim(A)$ .

*Démonstration.* En effet, soit  $m$  le plus petit indice tel que la famille

$$\{\mathbb{I}, a, a^2, \dots, a^j \dots, a^{m-1}\}$$

soit libre. Alors  $m \leq \dim(A)$  et

$$a^m = \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j a^j.$$

Ainsi le polynôme  $P = X^m - \sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j X^j$  annule  $a$  et donc le polynôme minimal  $Q_a$ , qui est un diviseur de  $P$ , est de degré  $\leq m \leq \dim(A)$ .  $\square$

**Proposition 3.6.** Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie et soient  $u, v \in L(E)$ . Si  $v$  commute à  $u$ , alors pour tout  $\lambda \in \sigma(u)$ , on a que

$$v(E_\lambda(u)) \subset E_\lambda(u), \quad v(N_\lambda(u)) \subset N_\lambda(u).$$

*Démonstration.* On a que

$$(u - \lambda\mathbb{I}_E) \circ v = v \circ (u - \lambda\mathbb{I}_E)$$

et donc aussi pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

$$(u - \lambda\mathbb{I}_E)^n \circ v = v \circ (u - \lambda\mathbb{I}_E)^n.$$

En particulier, si  $x \in \ker((u - \lambda\mathbb{I}_E)^n)$ , alors

$$(u - \lambda\mathbb{I}_E)^n(u(x)) = u((u - \lambda\mathbb{I}_E)^n(x)) = u(0) = 0$$

et ainsi

$$u(\ker((u - \lambda\mathbb{I}_E)^n)) \subset \ker((u - \lambda\mathbb{I}_E)^n).$$

$\square$

**Proposition 3.7.** Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie et soit  $u \in L(E)$ . Alors la somme des sous-espaces caractéristiques de  $u$  est directe.

*Démonstration.* Supposons que

$$0 = \sum_{\lambda \in \sigma(u)} x_\lambda,$$

où  $x_\lambda \in N_\lambda(u)$  pour tout  $\lambda \in \sigma(u)$ . Nous devons prouver que

$$x_\lambda = 0, \lambda \in \sigma(u).$$

Fixons  $\mu \in \sigma(u)$  et considérons l'endomorphisme

$$v = \prod_{\substack{\lambda \in \sigma(u) \\ \lambda \neq \mu}} (u - \lambda \mathbb{I}_E)^{\dim(E)}.$$

Nous avons pour  $\rho \in \sigma(u), \rho \neq \mu$  que

$$\begin{aligned} v(x_\rho) &= \prod_{\substack{\lambda \in \sigma(u) \\ \lambda \neq \mu}} (u - \lambda \mathbb{I}_E)^{\dim(E)}(x_\rho) \\ &= \prod_{\substack{\lambda \in \sigma(u) \\ \lambda \neq \mu, \lambda \neq \rho}} (u - \lambda \mathbb{I}_E)^{\dim(E)} \left( (u - \rho \mathbb{I}_E)^{\dim(E)}(x_\rho) \right) \\ &= \prod_{\substack{\lambda \in \sigma(u) \\ \lambda \neq \mu, \lambda \neq \rho}} (u - \lambda \mathbb{I}_E)^{\dim(E)}(0) = 0 \end{aligned}$$

et ainsi

$$0 = v(0) = v\left(\sum_{\lambda \in \sigma(u)} x_\lambda\right) = \sum_{\lambda \in \sigma(u)} v(x_\lambda) = v(x_\mu).$$

Mais pour tout  $\lambda \neq \mu$ , l'endomorphisme

$$(u - \lambda \mathbb{I}_E)|_{N_\mu(u)} = (\mu - \lambda) \mathbb{I}_{N_\mu(u)} + (u - \mu \mathbb{I})|_{N_\mu(u)}$$

est de la forme

$$\tau \mathbb{I} - n$$

avec  $0 \neq \tau \in K$  et  $n \in L(N_\mu(u))$  nilpotent. Mais un tel endomorphisme est inversible, l'inverse étant donné par

$$(\tau \mathbb{I} - n)^{-1} = \frac{1}{\tau} \left( \sum_{j=0}^{d(n)} \left(\frac{n}{\tau}\right)^j \right).$$

Donc la restriction de  $v$  à  $N_\mu(u)$  est aussi inversible car c'est la composée d'un certain nombre d'endomorphismes de cette forme, et ainsi  $v(x_\mu) = 0$  implique que  $x_\mu = 0$ .  $\square$

**Définition 3.8.** Un endomorphisme  $s \in L(E)$  est dit *diagonalisable*, si

$$E = \sum_{\lambda \in \sigma(u)} E_\lambda(u).$$

Une matrice  $A \in M_n(K)$  est dite *diagonalisable*, s'il existe une matrice inversible  $U \in MC_n$  telle que

$$A = U \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot U^{-1}.$$

**Proposition 3.9.** Soit  $u \in L(E)$  ( $\dim(E) < \infty$ ). Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $u$  est diagonalisable.
2. Il existe une base  $B$  de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $u$ .
3. Il existe une base  $B$  de  $E$  telle que la matrice  $A = M^{BB}(u)$  de  $u$  dans la base  $B$  soit diagonale.
4. La matrice  $A = M^{CC}(u)$  de  $u$  est diagonalisable pour toute base  $C$  de  $E$ .

*Démonstration.* 1) $\Rightarrow$ 2). Prenons pour chaque  $\lambda \in \sigma(u)$  une base  $B^\lambda = \{b_1^\lambda, \dots, b_{d_\lambda}^\lambda\}$  de  $E_\lambda(u)$ . Alors la réunion

$$B = \bigcup_{\lambda \in \sigma(u)} B^\lambda$$

est une base de  $E$ , car  $E$  est la somme directe des  $N_\lambda(u)$ , et tous les éléments de  $B$  sont des vecteurs propres. 2) $\Rightarrow$  3). Soit  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$ .

Alors la matrice

$$A = M^{BB}(u)$$

est diagonale car

$$\lambda_j \cdot b_j = u(b_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} b_i$$

et ainsi

$$a_{ij} = \lambda_j \delta_{ij}.$$

3) $\Rightarrow$ 4) Soit  $C$  une base quelconque de  $E$  et  $B$  une base constituée de vecteurs propres de  $u$ . Alors  $D = M^{BB}(u)$  est une matrice diagonale et

$$\begin{aligned} M^{CC}(u) &= M^{CB}(\mathbb{I}_E) \cdot M^{BB}(u) \cdot M^{BC}(\mathbb{I}_E) \\ &= U \cdot D \cdot U^{-1}, \end{aligned}$$

où  $U = M^{CD}(\mathbb{I}_E)$  est inversible. Donc  $M^{CC}(u)$  est diagonalisable. 4)  $\Rightarrow$  1). Soit  $C = \{c_1, \dots, c_n\}$  une base de  $E$ , soit  $U \in Gl_n(K)$  telle que

$$M = M^{CC}(u) = U \cdot D \cdot U^{-1},$$

où  $D = (\lambda_i \delta_{ij}) \in M_n(K)$  est diagonale. Alors  $M \cdot U = U \cdot M$  et donc

$$\sum_{k=1}^n M(i, j) U(j, k) = \lambda_j U(i, j), \quad \forall (i, j).$$

Posons

$$b_j = \sum_{k=1}^n U(k, j) c_k, \quad j = 1, \dots, n.$$

Alors  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  est une base de  $E$ , car  $U$  est inversible et pour  $1 \leq j \leq n$  nous avons que

$$\begin{aligned} u(b_j) &= u\left(\sum_{k=1}^n U(k, j) c_k\right) = \sum_{k=1}^n U(k, j) u(c_k) \\ &= \sum_{k=1}^n U(k, j) \sum_{i=1}^n M(i, k) c_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n M(i, k) U(k, j)\right) c_i \\ &= \lambda_j \sum_{i=1}^n U(i, j) c_i = \lambda_j b_j. \end{aligned}$$

Ainsi  $E$  possède une base (la base  $B$ ) constituée de vecteurs propres et donc  $E \subset \sum_{\lambda \in \sigma(u)} E_\lambda(u)$ , c. à d.  $u$  est diagonalisable.  $\square$

**Proposition 3.10.** Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et soit  $u \in L(E)$  un endomorphisme diagonalisable. Pour  $\lambda \in \sigma(u)$  soit

$$p_\lambda := \frac{1}{\prod_{\substack{\omega \neq \lambda \\ \omega \in \sigma(u)}} (\lambda - \omega)} \prod_{\substack{\omega \neq \lambda \\ \omega \in \sigma(u)}} (X - \omega)$$

et soit

$$p_\lambda = P_\lambda(u) \in L(E).$$

Alors  $p_\lambda$  est le projecteur sur l'espace propre  $E_\lambda(u)$  parallèlement aux autres sous-espaces propres.

*Démonstration.* En effet soit  $x \in E$ . Alors  $x = \sum_{\omega' \in \sigma(u)} x_{\omega'}$  avec  $x_{\omega'} \in E_{\omega'}(u)$ ,  $\omega' \in \sigma(u)$ . Donc

$$\begin{aligned} p_\lambda(x) &= \sum_{\omega' \in \sigma(u)} p_\lambda(x_{\omega'}) \\ &= \frac{1}{\prod_{\substack{\omega \neq \lambda \\ \omega \in \sigma(u)}} (\lambda - \omega)} \sum_{\omega' \in \sigma(u)} \prod_{\substack{\omega \neq \lambda \\ \omega \in \sigma(u)}} (u - \omega \mathbb{I}_E)(x_{\omega'}) \\ &= \frac{1}{\prod_{\substack{\omega \neq \lambda \\ \omega \in \sigma(u)}} (\lambda - \omega)} \sum_{\omega' \in \sigma(u)} \prod_{\substack{\omega \neq \lambda \\ \omega \in \sigma(u)}} (\omega' - \omega)(x_{\omega'}) \\ &= \frac{1}{\prod_{\substack{\omega \neq \lambda \\ \omega \in \sigma(u)}} (\lambda - \omega)} \left( \prod_{\substack{\omega \neq \lambda \\ \omega \in \sigma(u)}} (\lambda - \omega) \right) x_\lambda \\ &= x_\lambda. \end{aligned}$$

□

**Proposition 3.11.** Soient  $u, v \in L(E)$ , ( $\dim(E) < \infty$ ) deux endomorphismes diagonalisables. Supposons que  $u$  et  $v$  commutent. Alors  $u + v$  est aussi diagonalisable.

*Démonstration.* Comme  $u$  et  $v$  commutent, les projecteurs spectraux  $p_\lambda^u$ ,  $\lambda \in \sigma(u)$ , et  $p_\mu^v$ ,  $\mu \in \sigma(v)$ , commutent aussi, car ce sont des polynômes en  $u$  resp. en  $v$  d'après la proposition précédente. Soit  $E_{\lambda, \mu}$  l'image du projecteur  $p_{\lambda, \mu} := p_\lambda^u \circ p_\mu^v$ ,  $\mu \in \sigma(v)$ ,  $\lambda \in \sigma(u)$ . Soit  $x \in E_{\lambda, \mu}$ . Alors  $x = p_{\lambda, \mu}(y)$  pour un certain  $y \in E$  et donc

$$\begin{aligned} (u + v)(x) &= u(p_\lambda^u(p_\mu^v(y))) + v(p_\mu^v(p_\lambda^u(y))) \\ &= u(p_\lambda^u(p_\mu^v(y))) + v(p_\mu^v(p_\lambda^u(y))) \\ &= \lambda p_\lambda^u(p_\mu^v(y)) + \mu(p_\mu^v(p_\lambda^u(y))) \\ &= (\lambda + \mu)x. \end{aligned}$$

Ainsi  $E_{\lambda, \mu} \subset E_{u+v}(\lambda + \mu)$ . D'autre part nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_E &= \sum_{\lambda \in \sigma(u)} p_\lambda^u \\ &= \left( \sum_{\lambda \in \sigma(u)} p_\lambda^u \right) \circ \mathbb{I}_E \\ &= \sum_{\lambda \in \sigma(u)} \sum_{\mu \in \sigma(v)} p_\lambda^u \circ p_\mu^v. \end{aligned}$$

Ainsi  $E \subset \sum_{\lambda \in \sigma(u)} \sum_{\mu \in \sigma(v)} E_{u+v}(\lambda + \mu)$  et donc  $u + v$  est diagonalisable.

□

## 4 Le théorème de Jordan

**Théorème 4.1.** (Jordan) Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie et soit  $u \in L(E)$ . Supposons que le polynôme minimal  $Q_u$  de  $u$  se décompose en produit de facteurs linéaires, c. à d. que

$$Q_u(X) = \prod_{\omega \text{ racine}} (X - \omega)^{\beta_\omega}.$$

Alors  $E$  est la somme directe des sous-espaces caractéristiques de  $u$ . En particulier, le spectre de  $u$  est constitué des racines de  $Q_u$  et le degré de nilpotence de  $(u - \lambda \mathbb{I}_E)|_{N_\lambda(u)}$  est égal à  $\beta_\lambda$ ,  $\lambda \in \sigma(u)$ . Il existe une base

$$B = \bigcup_{\lambda \in \sigma(u)} B^\lambda = \bigcup_{\lambda \in \sigma(u)} \bigcup_{j=1}^{N_\lambda} B^{\lambda_j},$$

où  $B^{\lambda_j} = \{b_1^{\lambda_j}, \dots, b_{d_{\lambda_j}}^{\lambda_j}\}$

*Démonstration.* Posons pour une racine  $\omega$  de  $Q_u$

$$P_\omega = \prod_{\substack{\tau \text{ racine} \\ \tau \neq \omega}} (X - \tau)^{\beta_\tau}.$$

Alors les polynômes  $P_\omega$ ,  $\omega$  racine, sont premiers entre eux dans leur ensemble et il existe donc pour toute racine  $\tau$  un polynôme  $Q_\tau$ , tels que

$$\sum_{\tau} P_\tau \cdot Q_\tau = 1.$$

Posons

$$p_\tau = P_\tau(u), \quad R_\tau = P_\tau \cdot Q_\tau, \quad r_\tau = R_\tau(u) \in L(E), \quad \tau \text{ racine.}$$

Comme

$$\sum_{\tau \text{ racine}} R_\tau = 1$$

on a que

$$\sum_{\tau \text{ racine}} r_\tau = \mathbb{I}_E.$$

D'autre part, si  $\tau \neq \tau'$  alors

$$\begin{aligned} p_\tau \circ p_{\tau'} &= P_\tau(u) \circ P_{\tau'}(u) = \\ p_\tau \circ r_{\tau'} &= (P_\tau \cdot P_{\tau'})(u) \\ &= \left( \prod_{\substack{\tau'' \text{ racine} \\ \tau'' \neq \tau}} (X - \tau'')^{\beta_{\tau''}} \prod_{\substack{\tau''' \text{ racine} \\ \tau''' \neq \tau'}} (X - \tau''')^{\beta_{\tau'''}} \right) (u) \\ &= \left( \dots \prod_{\substack{\omega \text{ racine} \\ \omega \neq \tau}} (X - \omega)^{\beta_\omega} \right) (u) = \dots - Q_u(u) = 0. \end{aligned}$$

Alors on a aussi :

$$r_\tau \circ r_{\tau'} = Q_\tau(u) \circ Q_{\tau'}(u) \circ (p_\tau \circ p_{\tau'}) = 0, \tau \neq \tau'.$$

En outre

$$r_\tau = r_\tau \circ \mathbb{I}_E = r_\tau \circ \left( \sum_{\omega} r_\omega \right) = \sum_{\omega} r_\tau \circ r_\omega = r_\tau \circ r_\tau = r_\tau^2.$$

Ainsi  $r_\tau$  est le projecteur sur son image  $I_\tau$  parallèlement aux sous-espaces  $I_\omega$ ,  $\omega \neq \tau$ . en particulier

$$(4.1) \quad E = \sum_{\tau \text{ racine}} I_\tau$$

Montrons que

$$N_\tau(u) = \text{image}(p_\tau), \tau \text{ racine.}$$

En effet, si  $x \in \text{image}(p_\tau)$  alors  $x = p_\tau(y)$  pour un certain  $y \in E$  et alors

$$(u - \tau \mathbb{I}_E)^{\beta_\tau}(x) = (u - \tau \mathbb{I}_E)^{\beta_\tau} p_\tau(y) = Q_u(u)(y) = 0.$$

Donc  $\text{image}(p_\tau) \subset N_\tau(u)$ . Réciproquement, si  $x \in N_\tau(u)$ , alors il existe  $y \in N_\lambda(u)$ , tel que  $x = p_\tau(y)$  car l'endomorphisme  $p_\tau|_{N_\tau(u)}$  est bijectif d'après la preuve de la proposition 3.7. Donc  $N_\tau(u) \subset \text{image}(p_\tau)$ . Finalement  $N_\tau(u) = \text{image}(p_\tau)$ ,  $\tau$  racine .

Nous voyons alors que

$$(u - \tau \mathbb{I})^{\beta_\tau}(N_\tau(u)) = (u - \tau \mathbb{I})^{\beta_\tau} \circ p_\tau(N_\tau(u)) = Q_u(u)(N_\tau(u)) = \{0\},$$

mais que

$$(u - \tau \mathbb{I})^{\beta_\tau - 1}(N_\tau(u)) = (u - \tau \mathbb{I})^{\beta_\tau - 1} \circ p_\tau(E) \neq \{0\},$$

car  $Q_u = (X - \tau)^{\beta_\tau} P_\tau(X)$  est le polynôme minimal de  $u$ . Donc le degré de nilpotence de  $(u - \tau \mathbb{I}_E)|_{N_\tau(u)}$  est égal à l'exposant  $\beta_\tau$ .

Montrons que pour toute racine  $\tau$  le sous-espace  $I_\tau$  est égal à  $N_\tau(u)$ . Nous savons déjà que l'image du projecteur  $r_\tau$ ,  $\tau$  racine, est contenu dans l'image de  $p_\tau$ , donc est contenue dans  $N_\tau(u)$ , car  $r_\tau = p_\tau \circ Q_\tau(u)$ . Soit  $x \in N_\tau(u)$ . Alors

$$x = \sum_{\lambda \text{ racine}} y_\lambda$$

où  $y_\lambda \in I_\lambda$  pour toute racine  $\lambda$ . Donc  $x = y_\tau \in I_\tau$ , car la somme des sous-espaces caractéristiques est directe. Ainsi  $N_\tau \subset I_\tau \subset N_\tau(u)$ ,  $\tau$  racine, c. à d.

$$I_\tau = N_\tau(u), \tau \text{ racine.}$$

Nous avons vu que les sous-espaces  $N_\tau(u)$ ,  $\tau$  racine, ne sont pas réduits à  $\{0\}$ , donc toute racine  $\tau$  est une valeur propre. Ainsi les racines de  $Q_u$  sont contenus dans le spectre de  $u$ . Soit  $\lambda \in \sigma(u)$  et supposons que  $\lambda$  n'est pas une racine de  $Q_u$ . Comme

$$E = \sum_{\tau \text{ racine}} N_\tau(u)$$

on a que

$$x = \sum_{\tau \text{ racine}} x_\tau$$

où  $x_\tau \in N_\tau(u)$  pour tout  $\tau$ . Donc

$$(-x) + \sum_{\tau \text{ racine}} x_\tau = 0,$$

ce qui implique que  $x = 0$ , car la somme des sous-espaces caractéristiques est directe. On obtient une contradiction avec le fait que  $x \neq 0$ . Ainsi  $\sigma(u)$  est l'ensemble des racines de  $Q_u$ .

Prenons pour chaque  $\lambda \in \sigma(u)$  une base de Jordan  $B^\lambda$  de  $N_\lambda(u)$  pour l'endomorphisme nilpotent  $u_\lambda = (u - \lambda \mathbb{I}_E)|_{E_\lambda(u)}$  :

$$B^\lambda = \bigcup_{j=1}^{N_\lambda} B^{\lambda_j},$$

où

$$B^{\lambda_j} = \{b_1^{\lambda_j}, \dots, b_{d_{\lambda_j}}^{\lambda_j}\}.$$

Alors

$$(u_\lambda - \mathbb{I}_E)(b_i^{\lambda_j}) = b_{i-1}^{\lambda_j}, \quad i > 1$$

et

$$(u_\lambda - \mathbb{I}_E)(b_1^{\lambda_j}) = 0.$$

Notons

$$s = \sum_{\lambda \in \sigma(u)} \lambda r_\lambda, \quad n = u - s.$$

Alors pour  $x = \sum_{\lambda \in \sigma(u)} x_\lambda$ , ( $x_\lambda \in N_\lambda(u)$ )

$$\begin{aligned} s(x) &= s\left(\sum_{\mu \in \sigma(u)} x_\mu\right) = \left(\sum_{\lambda \in \sigma(u)} \lambda r_\lambda\right)\left(\sum_{\mu \in \sigma(u)} x_\mu\right) \\ &= \sum_{\mu \in \sigma(u)} \lambda x_\lambda. \end{aligned}$$

Donc  $s$  est diagonalisable. On a  $(u - s)|_{N_\lambda(u)} = (u - \lambda \mathbb{I}_E)|_{N_\lambda(u)}$  et ainsi, pour  $x \in N_\lambda(u)$ ,

$$(u - s)^{\beta_\lambda}(x) = (u - \lambda \mathbb{I}_E)^{\beta_\lambda}(x) = 0$$

et ainsi  $n = u - s$  est nilpotent de degré

$$d(n) = \sup_{\lambda \in \sigma(u)} \beta_\lambda.$$

Ecrivons

$$S = \sum_{\lambda \in \sigma(u)} \lambda R_\lambda, \quad N = X - S.$$

Alors

$$S(u) = s, \quad N(u) = n.$$

Donc  $s \circ n = n \circ s$ . Montrons l'unicité de  $s$  et de  $n$ . Soit  $t$  un endomorphisme diagonalisable et  $m$  un endomorphisme nilpotent, tel que

$$u = t + m, \quad t \circ m = m \circ t.$$

Alors

$$u \circ t = (t + m) \circ t = t^2 + m \circ t = t^2 + t \circ m = t \circ (m + t) = t \circ u.$$

De la même façon,  $m \circ u = u \circ m$ . Ainsi

$$s \circ t = S(u) \circ t = t \circ S(u) = t \circ s$$

et de même

$$m \circ n = n \circ m.$$

Donc

$$t - s = m - n,$$

$t - s$  est diagonalisable et  $n - m$  est nilpotent. Mais tout endomorphisme diagonalisable, qui est nilpotent a un spectre réduit à  $\{0\}$  et est donc lui-même 0. Ainsi

$$t = s, \quad m = n.$$

Montrons qu'on peut changer  $S$ , tel que  $S$  soit sans terme constant. Si  $u$  est inversible, alors le terme constant  $a_0$  de  $Q_u$  est différent de 0. Donc si  $S = s_0 + \dots$ , le polynôme

$$S_1 = S - \frac{s_0}{a_0} Q_u$$

est sans terme constant et vérifie

$$S_1(u) = S(u) - \frac{s_0}{a_0} Q_u(u) = S(u) + 0 = s.$$

Si  $u$  n'est pas inversible, alors

$$\begin{aligned} s &= \sum_{\lambda \in \sigma(u)} \lambda r_\lambda = \sum_{\substack{\lambda \in \sigma(u) \\ \lambda \neq 0}} \lambda r_\lambda \\ &= \left( \sum_{\substack{\lambda \in \sigma(u) \\ \lambda \neq 0}} \lambda R_\lambda \right) (u). \end{aligned}$$

Or

$$P_\lambda = \prod_{\mu \neq \lambda} (X - \mu)^{\beta_\mu} = X^{\beta_0} \prod_{\substack{\mu \neq \lambda \\ \mu \neq 0}} (X - \mu)^{\beta_\mu}$$

est sans terme constant pour  $\lambda \neq 0$ . Finalement

$$S = \sum_{\substack{\lambda \in \sigma(u) \\ \lambda \neq 0}} \lambda Q_\lambda P_\lambda$$

est sans terme constant. □

**Corollaire 4.2.** Soit  $A \in M_n(K)$ , tel que le polynôme minimal  $Q_A$  de  $A$  se décompose en produit de facteurs linéaires, c. à d.

$$Q_A(X) = \prod_{\omega} (X - \omega)^{\beta_\omega}.$$

Alors il existe une matrice inversible  $U$  telle que

$$\begin{aligned} A &= U \cdot \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\lambda_{k-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & J_{\lambda_k} \end{pmatrix} \cdot U^{-1}, \\ J_{\lambda_i} &= \begin{pmatrix} J_i^1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & J_i^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_i^{N_i-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & J_i^{N_i} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et où

$$J_i^j = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

**Proposition 4.3.** *Pour qu'un endomorphisme  $u \in L(E)$  soit diagonalisable, il faut et il suffit que le polynôme minimal de  $u$  se décompose en facteurs linéaires et que la multiplicité de chaque facteur linéaire soit égale à 1.*

*Démonstration.* Si  $u$  est diagonalisable, alors

$$\prod_{\lambda \in \sigma(u)} (u - \lambda \mathbb{I}_E) = 0,$$

car

$$(u - \lambda \mathbb{I}_E)(E_\lambda) = (0)$$

pour tout  $\lambda$ . Le polynôme minimal  $Q_u$  de  $u$  divise donc le polynôme  $P = \prod_{\lambda \in \sigma(u)} (X - \lambda)$  et se décompose alors en produit de facteurs linéaires. Comme les racines de  $Q_u$  sont les éléments du spectre de  $u$ , il faut que  $Q_u = P$ . Si

$$Q_u = \prod_{\lambda \in \sigma(u)} (X - \lambda)^1$$

alors le degré de nilpotence de  $u - \lambda \mathbb{I}$  sur  $N_\lambda(u)$  est égal à 1 et donc  $(u - \lambda \mathbb{I}_E)(x) = 0$ , pour tout  $x \in N_\lambda(u)$ . Ainsi  $E_\lambda(u) = N_\lambda(u)$ ,  $\lambda \in \sigma(u)$  et  $u$  est diagonalisable.  $\square$   $\square$

## 5 Jordanisation d'une matrice carrée.

Soit  $A \in M_n(K)$  une matrice carrée telle que son polynôme minimal  $Q_u = \prod_{\lambda \in \sigma(A)} (X - \lambda)^{\beta_\lambda}$  se décompose en produit de facteurs linéaires. Soit  $P_A = \det(A - X \mathbb{I}_n) = \prod_{\lambda \in \sigma(A)} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$  le polynôme caractéristique de  $A$  et soit  $u : {}^n K \rightarrow {}^n K$  l'endomorphisme défini par

$$u(x) = A \cdot x, \quad x \in {}^n K.$$

Nous trouvons les sous-espaces caractéristiques  $N_\lambda(u)$ ,  $\lambda \in \sigma(A)$ , de  $u$  en calculons les matrices  $P_\lambda = \prod_{\omega \neq \lambda} (A - \omega \mathbb{I}_n)^{\alpha_\omega}$ . En effet on vérifie facilement que l'endomorphisme  $\prod_{\omega \neq \lambda} (u - \omega \mathbb{I}_n)^{\alpha_\omega}$  annule les sous-espaces  $N_\omega(u)$ ,  $\omega \neq \lambda$  et qu'il est inversible sur  $N_\lambda(u)$ , donc il a comme image justement le sous-espace  $N_\lambda(u)$ . On obtient donc une partie génératrice de  $N_\lambda(u)$  en considérant les vecteurs colonnes de  $P_\lambda$ . En calculons les matrices  $(A - \lambda \mathbb{I}_n)^j \cdot P_\lambda$ ,  $j = 1, \dots, \beta_\lambda$ , on obtient les sous-espaces  $\text{im}((u - \lambda \mathbb{I})|_{N_\lambda(u)})^j$  en prenant l'espace engendré par les colonnes de ces matrices. Ceci nous permet de trouver une base de Jordan  $\mathcal{B}^\lambda$  de l'endomorphisme  $(u - \lambda \mathbb{I})|_{N_\lambda(u)}$  et ainsi en faisant la réunion sur ces  $\mathcal{B}^\lambda$  on obtient une base de Jordan  $\mathcal{B}$  pour  $u$ . Les éléments de  $\mathcal{B}$  forment une matrice inversible  $U$  qui a la propriété que

$$J = U^{-1} \cdot A \cdot U$$

est la matrice de Jordan de  $A$  (et de  $u$ ).

## 6 Une application : Les équations différentielles ordinaires linéaires.

Soit  $E$  un espace vectoriel complexe ou réel de dimension finie. Prenons une norme  $\|\cdot\|$  sur  $E$ . Pour un endomorphisme linéaire  $u$  de  $E$  soit

$$\|u\|_{op} := \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \|u(x)\|.$$

On vérifie que la fonction ainsi définie sur l'espace des endomorphismes  $L(E)$  est une norme :

1.  $\|u\|_{op} = 0 \equiv u = 0$ ,
2.  $\|u + v\|_{op} \leq \|u\|_{op} + \|v\|_{op}, u, v \in L(E)$ ,
3.  $\|u \circ v\|_{op} \leq \|u\|_{op}\|v\|_{op}, u, v \in L(E)$ .

Pour justifier le dernier point, on vérifie que

$$\|u(x)\| = \|u\left(\frac{\|x\|x}{\|x\|}\right)\| = \|x\| \|u\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\| \leq \|u\|_{op}\|x\|, 0 \neq x \in E$$

et alors

$$\begin{aligned} \|u \circ v\|_{op} &= \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \|u \circ v(x)\| \\ &\leq \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \|u\|_{op}\|v(x)\| \\ &\leq \|u\|_{op}\|v\|_{op}. \end{aligned}$$

**Lemme 6.1.** Soit  $u \in L(E)$ . alors la série

$$e^u := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u^j}{j!}$$

converge en norme dans  $L(E)$ .

*Démonstration.* Comme  $E$  est de dimension fini, l'espace normé  $(L(E), \|\cdot\|_{op})$  est complet. Donc il suffit de montrer que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k \frac{\|u^j\|_{op}}{j!} < \infty$ .

Or d'après la relation (6, (3)) on a que  $\|u^j\|_{op} \leq \|u\|_{op}^j, j \in \mathbb{N}^*$ . Donc pour le plus petit indice  $j_0$  tel que  $j_0 \geq 2(1 + \|u\|_{op})$  on a que

$$\frac{\|u^j\|_{op}}{j!} \leq \frac{\|u\|_{op}^j}{j!} \leq j_0^{j_0} \frac{\|u\|_{op}^j}{j_0^j} \leq j_0^{j_0} \frac{1}{2^j} =: c_u \frac{1}{2^j}.$$

Donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k \frac{\|u^j\|_{op}}{j!} \leq c_u \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k \frac{1}{2^j} < \infty.$$

□

**Lemme 6.2.** Soient  $u, v \in L(E)$ , tels que  $u \circ v = v \circ u$ . Alors

$$e^u \circ e^v = e^{u+v}.$$

*Démonstration.* En effet on a

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^k \frac{u^i}{i!}\right) \left(\sum_{j=0}^k \frac{v^j}{j!}\right) &= \sum_{i,j=0}^k \frac{u^i v^j}{i! j!} \\ &= \sum_{l=0}^k \sum_{i+j=l} \frac{u^i v^j}{i! j!} + \sum_{\substack{i+j > k \\ i, j \leq k}} \frac{u^i v^j}{i! j!} \\ &= \sum_{l=0}^k \frac{(u+v)^l}{l!} + \sum_{\substack{i+j > k \\ i, j \leq k}} \frac{u^i v^j}{i! j!}. \end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i+j>k \\ i,j\leq k}} \left\| \frac{u^i v^j}{i!j!} \right\|_{\text{op}} &\leq \sum_{\substack{i+j>k \\ i,j\leq k}} \frac{\|u\|_{\text{op}}^i \|v\|_{\text{op}}^j}{i!j!} \\
&\leq c_u c_v \sum_{\substack{i+j>k \\ i,j\leq k}} \frac{1}{2^{i+j}} \\
(6.2) \qquad \qquad \qquad &\leq \frac{k^2}{2^k} \rightarrow 0 \text{ si } k \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
e^u \circ e^v &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=0}^k \frac{u^i}{i!} \right) \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=0}^k \frac{v^j}{j!} \right) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \left( \sum_{i=0}^k \frac{u^i}{i!} \right) \left( \sum_{j=0}^k \frac{v^j}{j!} \right) \right) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{l=0}^k \frac{(u+v)^l}{l!} + \sum_{\substack{i+j>k \\ i,j\leq k}} \frac{u^i v^j}{i!j!} \right) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{l=0}^k \frac{(u+v)^l}{l!} \right) + \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{\substack{i+j>k \\ i,j\leq k}} \frac{u^i v^j}{i!j!} \right) \\
&= e^{u+v},
\end{aligned}$$

d'après (6.2). □

Considérons l'équation différentielle :

$$\dot{X}(t) = u(X(t)), t \in \mathbb{R}, X(0) = x_0.$$

Ici  $t \mapsto X(t)$  est une application de classe  $C^{(1)}$  définie sur un intervalle ouvert  $I$  à valeurs dans  $E$  et  $u \in L(E)$  et où  $x_0$  est un vecteur choisi dans  $E$ .

**Théorème 6.3.** *L'équation différentielle  $\dot{X}(t) = u(X(t)), t \in \mathbb{R}, X(0) = x_0$  admet la solution unique :  $X(t) = e^{tu}(x_0), t \in \mathbb{R}$ .*

*Démonstration.* En effet, on vérifie tout de suite que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(e^{tu}) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^{(t+s)u} - e^{tu}}{s} \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(e^{su} - 1)}{s} e^{tu} \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left( \sum_{j=1}^{\infty} s^{j-1} \frac{u^j}{j!} \right) e^{tu} \\
&= u e^{tu}, t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Ainsi la courbe  $X(t) := e^{tu}x_0$  vérifie l'équation et aussi la condition initiale  $X(0) = x_0$ .

Si  $Y : I \rightarrow E$  est une autre solution de l'équation, alors considérons  $Z(t) = e^{-tu}(Y(t)), t \in \mathbb{R}$ .

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(Z(t)) &= e^{-tu}(\dot{Y}(t)) - u(e^{-tu}(Y(t))) \\
&= e^{-tu}(u(Y(t))) - u(e^{-tu}(Y(t))) \\
&= u(Z(t) - Z(t)) = 0, t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc l'application  $t \mapsto Z(t)$  est constante. Finalement  $Z(t) = x_0$  pour tout  $t \in I$ . Ceci veut dire que  $Y(t) = e^{tu}x_0, t \in I$ .  $\square$

D'après le théorème de Jordan, pour un espace  $E$  complexe, ou si  $E$  est réel et vérifie la condition du théorème, alors on peut écrire

$$u = s + n, s \text{ diagonalisable et } n \text{ nilpotent, } s \circ n = n \circ s.$$

Alors

$$e^{tu} = e^{ts+tn} = e^{ts} \left( \sum_{j=0}^d \frac{t^j n^j}{j!} \right), d = \dim E.$$

Si nous prenons une base de Jordan  $\mathcal{B}$  de  $E$ , alors la matrice  $S$  de l'endomorphisme  $s$  est diagonale et

$$S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_d \end{pmatrix}$$

et la matrice de  $e^{ut}$  pour la base  $\mathcal{B}$  est donnée par

$$e^{tS} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{t\lambda_d} \end{pmatrix}.$$