MASTER 2 RECHERCHE, 2008–2009

Semestre S9

J. LUDWIG : Groupes de Lie compacts (UE 9.1)

T. WURZBACHER : Méthodes géométriques en mathématique physique (UE 9.2)

J.-L. TU : C^*-algèbres et géométrie différentielle non commutative
(UE 9.3)

M. CHOULLI : Problèmes inverses elliptiques
(UE 9.5)

R. CHILL : Méthodes variationnelles et EDP
(UE 9.6)

M. BARRET : Traitement statistique du signal
(UE-SUP1, Supélec, Campus de Metz)

Semestre S10

R. MORTINI : Opérateurs linéaires sur des algèbres et espaces fonctionnels
(UE 10.1)

A. PASQUALE : Géométrie et analyse sur les espaces symétriques
(UE 10.2)

A. GUESMIA : Inégalités intégrales et stabilisation non dissipative des EDP
(UE 10.3)

P. TURELLE : Méthodes et algorithmes de traitement numérique des signaux
(UE-SUP2, Supélec, Campus de Metz)

Cours du premier semestre du Master 2, Recherche – 2008/2009

Groupes de Lie compacts et leurs représentations

Enseignant : Jean LUDWIG

Description du cours :
Ce cours expose la théorie des groupes de Lie compacts et de leurs représentations.
Contenu du cours :

(1) Groupes et algèbres de Lie. Les groupes de Lie classiques
(2) L'application exponentielle.
(3) Sous-groupes fermés et sous-algèbres de Lie.
(4) Groupes et algèbres de Lie résolubles et nilpotents.
(5) Structure des groupes de Lie compacts et de leurs algèbres de Lie. Tores maximaux.
(6) Représentations unitaires des groupes de Lie compacts
(7) Le théorème de Peter-Weyl, la réciprocité de Frobenius.
(8) Le théorème du plus haut poids.
(9) La formule de la trace.

Toute la théorie sera illustrée en détail dans les exemples.

Bibliographie :
– Le cours est essentiellement basé sur le livre de
Nolan R. Wallach, Harmonic analysis on homogeneous spaces, Pure and Applied Mathematics. 19. New York : Marcel Dekker, Inc. XV, 361 p.
– à consulter aussi
  – Dixmier Jacques, *Algèbres enveloppantes.* Cahiers scientifiques. Fasc. XXXVII. Paris - Bruxelles - Montreal : Gauthier-Villars Editeur. 349 p.(1974).
  – Karl H. Hofmann, Sidney A. Morris, The structure of compact groups. A primer for the student – a handbook for the expert. de Gruyter Studies in Mathematics. 25. Berlin : Walter de Gruyter. xvii, 835 p.
  – L. Pukanszky, Leçons sur les représentatations des groupes Paris, Dunod 1967. VIII, 178 p. (1967).

Cours du premier semestre du Master 2, Recherche – 2008/2009

Méthodes géométriques en mathématique physique

Enseignant : Tilmann WURZBACHER

Description du cours : Le but de ce cours fondamental est d'introduire aux méthodes (pseudo-)riemanniennes, très utiles en mathématique physique et en géométrie différentielle, ainsi qu'en d'autres domaines comme l'analyse harmonique et la géométrie non-commutative. De plus, certaines équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles d'une nature géométrique seront introduites et traitées.

0. Rappel du calcul sur les variétés différentiables (si nécessaire)
1. Définition et exemples des variétés (pseudo-)riemanniennes
2. Connexions linéaires et (pseudo-)riemanniennes
3. Géodesiques et voisinages convexes
4. Courbure
5. Champs de Jacobi
6. Immersions isométriques et sous-variétés d'une variété riemannienne
7. Variétés complètes et les théorémes de Hopf-Rinow et de Hadamard
8. Espaces à courbure constante
9. Courbure et topologie
10. Théorie de Morse
11. Théorie de Hodge
12. Applications harmoniques

Prérequis :

Calcul différentiel et intégral en plusieurs variables, équations différentielles ordinaires dans $\mathbb{R}^n$, algèbre linéaire, topologie.

Bibliographie :

W.M. Boothby, *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, Academic Press, Orlando 1975 & 1986.
M.P. Do Carmo, *Riemannian geometry*, Birkhäuser, Boston 1992.
S. Gallot, D. Hulin and J. Lafontaine, *Riemannian geometry*, Springer, Berlin 2004.
C. Godbillon, *Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique*, Hermann, Paris 1969.
S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry. Vol. I-II*, Interscience, New York 1963.
J.M. Lee, *Riemannian manifolds*, Springer, New York 1997.
J. Jost, *Riemannian geometry and geometric analysis*, Springer, Berlin 1995 & 1998 & 2005.
M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I-V*, Publish or Perish, Berkeley 1979.
M.E. Taylor, *Partial Differential Equations : Basic theory (Vol. 1) ; resp. Qualitative studies of linear equations (Vol. 2)*, Springer, Berlin 1996.

Cours du premier semestre du Master 2, Recherche – 2008/2009

C^*-algèbres et géométrie différentielle non commutative

Enseignant : Jean-Louis TU

Description du cours : 1. C*-algèbres : spectre, C*-algèbres commutatives, théorème de Gelfand, calcul fonctionnel continu, représentations, construction GNS. C*-algèbres d'un groupe localement compact : C*-algèbre maximale et réduite.
2. Fibrés vectoriels, classes caractéristiques, caractère de Chern.
3. K-théorie : théorème de Serre-Swan, K-théorie des espaces localement compacts et des C*-algèbres.
4. Cohomologie cyclique. Survol de quelques applications : approche de la conjecture de Novikov par la cohomologie cyclique, théorème d'indice supérieur pour les revêtements.

Prérequis : Cours de base d'analyse fonctionnelle.

Bibliographie :

J. Dixmier. Les C*-algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars 1964.
G. Pedersen. C*-algebras and their automorphism groups, Academic Press 1979.
R. Kadison, J. Ringrose. Fundamentals of operator algebras, vol. I, II Academic Press 1983, 1986.
J. Milnor, J. Stasheff, James D. Characteristic classes. Annals of Mathematics Studies, No. 76. Princeton University Press, 1974.
M. Atiyah. K-theory, (W.A. Benjamin, New York, 1967).
B. Blackadar. K-theory for operator algebras, MSRI Publications, Vol. 5, (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).
N.E. Wegge-Olsen. K-Theory and C*-Algebras : A Friendly Approach. Oxford University Press (1993).
A. Connes. Noncommutative geometry. Academic Press (1994).

Cours de premier semestre du Master 2, Recherche – 2008/2009

Problèmes inverses elliptiques

Enseignant : Mourad CHOULLI

Description du cours : Dans un premier temps on considérera la détermination d'un potentiel dans une équation de Schrödinger à partir de l'opérateur Dirichlet-Neumann (DN en abrégé), qu'on appelle aussi l'opérateur de Steklov-Poincaré. On établira l'unicité et la stabilité pour ce problème par une méthode fondée sur la construction de solutions "optique géométrique". On exposera au passage différentes manières de construire ces solutions "optique géométrique".

En deuxième partie on étudiera un problème spectral inverse. Plus précisément une version multidimensionnelle du théorème de Borg-Levinson. L'unicité sera démontrée une nouvelle fois grâce aux solutions "optique géométrique". Quant à la stabilité, elle est essentiellement basée sur un théorème de stabilité pour un problème hyperbolique. Ceci donnera l'occasion de construire des solutions particulières, dites "beam solutions" pour l'équation des ondes. On verra aussi comment l'utilisation de ses solutions particulières fait apparaître de manière tout à fait naturelle la transformée rayon X, dont on utilisera quelques propriétés.

Dans une troisième et dernière partie, on établira un résultat de stabilité pour le problème qui consiste à déterminer la conductivité à la frontière à partir de l'opérateur DN. La preuve qu'on donnera utilise essentiellement la construction de solutions singulières. On donnera aussi une alternative aux solutions singulières.

Le cours sera précédé de rappels et compléments sur les distributions et l'analyse de Fourier. Le contenu de cette partie introductive sera en fonction des acquis des participants.

Prérequis :

Les cours fondamentaux de niveau M1.

Bibliographie :

M. Choulli, une introduction aux problèmes inverses elliptiques et paraboliques, livre à paraître.

Cours de premier semestre du Master 2, Recherche – 2008/2009

Méthodes variationnelles et EDP

Enseignant : Ralph CHILL

Description du cours :

Beaucoup de problèmes en applications des mathématiques sont liés à des problèmes variationnelles comme celui de trouver un minimum d'une fonction réelle sur un espace de Banach ou celui de trouver un point critique d'une telle fonction. On pensera par exemple au principe de moindre action en physique ou à des problèmes d'optimisation en économie, physique, ingénierie ... Certains problèmes elliptiques et hyperboliques peuvent être résolus avec des méthodes variationnelles.

Ce cours ne veut être qu'une introduction. Il va se concentrer autour du théorème de minimisation de fonctions convexes, qui va être démontré. On va discuter plusieurs applications de ce résultat fondamental et quelques autres théorèmes de base en calcul des variations sur l'existence de points critiques (minima locaux, points selles).

Prérequis :

Analyse fonctionnelle. Eventuellement Analyse fonctionnelle appliquée. Cours d'équations aux dérivées partielles.

Bibliographie :

[1] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1992.

[2] I. Fonseca, G. Leoni, *Modern methods in the calculus of variations : L^p spaces.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2007.

[3] J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[4] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications. I*, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1990.

[5] E. Zeidler, *Applied Functional Analysis : Applications to Mathematical Physics*, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1995.

Cours du deuxième semestre du Master 2, Recherche – 2008/2009

Opérateurs linéaires sur des algèbres et espaces fonctionnels

Enseignant : Raymond MORTINI

Description du cours :

Soit T l'opérateur de déplacement $(a_0, a_1, a_2, \cdots) \mapsto (0, a_0, a_1, \cdots)$ sur ℓ^2. On se propose de déterminer les sous-espaces invariants U de T (théorème de Beurling). Une solution complète peut être donnée en réalisant ℓ^2 comme espace de fonctions analytiques sur le disque unité $\mathbf{D}$.

On va aussi étudier en détail les opérateurs de composition $T_\phi : A \to A, f \mapsto f \circ \phi$, pour certains espaces de Banach de fonctions analytiques sur $\mathbf{D}$, tels que les espaces de Hardy et de Bergman. (Ici ϕ est une application holomorphe de $\mathbf{D}$ dans $\mathbf{D}$.) En particulier on va étudier la structure du spectre de ces opérateurs et donner une caractérisation des symboles ϕ pour lesquels T_ϕ soit compact. On va voir que les endomorphisme d'algèbres uniformes seront réalisables comme opérateurs de compositions. L'étude des combinaisons linéaires de ces endomorphimes sera un sujet de thèse. On se propose aussi d'étudier les opérateurs T_ϕ ayant la propriété qu'il existe un vecteur x tel que l'orbite $\{T_\phi^n x : n \in \mathbf{N}\}$ soit dense (opérateur hypercyclique). Le fil rouge de ce cours sera l'enjeu harmonique entre l'analyse fonctionnelle/théorie des opérateurs et l'analyse complexe. Enfin, les connections avec le célèbre problème des sous-espaces invariants pour les espaces de Hilbert seront discutées.

Prérequis : Introduction à l'analyse fonctionnelle et à l'analyse complexe (L3 et M1)

Bibliographie :

• Cowen, Carl C. ; MacCluer, Barbara D. Composition operators on spaces of analytic functions. (English) Studies in Advanced Mathematics. Boca Raton, FL : CRC Press. xii, 388 p. $ 59.95 (1995).

• Nikolski, N.K. Operators, functions, and systems : an easy reading. Volume I : Hardy, Hankel, and Toeplitz. Transl. from the French by Andreas Hartmann. (English) Mathematical Surveys and Monographs. 92. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS). xiv, 461 p. $ 98.00 (2002).

• Rudin, W : Real and complex analyis ; MacGrawHill, 1986.

• Shapiro, Joel H. Composition operators and classical function theory. (English) Universitext : Tracts in Mathematics. New York : Springer-Verlag. xiii, 223 p. DM 60.00 (1993).

• Zhu, Kehe. Operator theory in function spaces. (English) Pure and Applied Mathematics, 139. New York etc. : Marcel Dekker, Inc. ix, 258 p. $ 119.50 (outside US and Canada) ; $ 99.75 (US and Canada) (1990).

Cours du deuxième semestre du Master 2, Recherche – 2008/2009

Géométrie et analyse sur les espaces symétriques

Enseignante : Angela PASQUALE

Description du cours :
Ce cours a pour objet l'étude des espaces symétriques et des opérateurs différentiels invariants sur ces espaces.

Programme :
Espaces localement symétriques et espaces symétriques
Paires symétriques
Structure des groupes et des algèbres de Lie semisimples
Espaces symétriques riemanniens de type compact, non-compact et euclidien
Opérateurs différentiels sur les variétés
L'opérateur de Laplace-Beltrami
Opérateurs différentiels invariants sur les espaces symétriques
Opérations géométriques sur les opérateurs différentiels : projections et parties radiales.

Prérequis : Le cours sur les groupes de Lie compacts du premier semestre.

Bibliographie :

[1] Helgason, S. : Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces. Academic Press, 1978

[2] Helgason, S. : Groups and geometric analysis. Academic Press, 1984

[3] Huckleberry, A. : Symmetric spaces for nonspecialists : Basic concepts, 2004. http ://www.sfbtr12.uni-koeln.de/lect1%20huck.pdf

[4] Knapp, A. : Lie groups beyond an introduction, Birkhäuser, 2004.

[5] Kirillov, A.A.(ed.) : Representation Theory and Noncommutative Harmonic Analysis II, Springer, 1995.

[6] Kobayashi, S., Nomizu, K. : Foundations of Differential Geometry, Volume II, Wiley, 1996.

[7] Wolf, J.A. : Harmonic analysis on commutative spaces. Mathematical Surveys and Monographs, 142. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007

Cours de premier/deuxieme semestre du Master 2, Recherche – 2008/2009

Inégalités intégrales et stabilisation non dissipative des EDP

Enseignant : Aissa GUESMIA

Description du cours :
L'objectif du cours est de présenter quelques inégalités intégrales et traiter le problème de stabilisation non dissipative de certains systèmes d'EDP (ondes, Petrovsky, élasticité, couplés,...).

Chapitre 1. Opérateurs maximaux monotones.
Chapitre 2. Existence et régularité des solutions.
Chapitre 3. Inégalités intégrales.
Chapitre 4. Méthôde de multiplicateurs.
Chapitre 5. Equation des ondes.
Chapitre 6. Equation de Petrovsky.
Chapitre 7. Systèmes couplés.
Chapitre 8. Systèmes d'élasticité.
Chapitre 9. Système abstrait.

Prérequis :
Les cours de Master 1 d'analyse fonctionnelle, d'EDP et de contrôle.

Bibliographie :
1. H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Masson, Paris, 1993.

2. J. Dieudonné, Éléments d'analyse, fondements de l'analyse moderne, Gauthier - Villars, Paris, 1969.

3. A. Guesmia, Inégalités intégrales et applications à la stabilisation des systèmes distribués non dissipatifs, thèse d'HDR, Metz, 2006.

4. V. Komornik, Exact controllability and stabilization. The multiplier method, Masson-John Wiley, Paris, 1994.

5. J.-L. Lions, Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués, collection RMA, Masson, Paris, 1988.

6. A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to PDE, Springer, New York, 1983.

7. P. A. Raviart et J. M. Thomas, Introduction à l'analyse numérique des EDP, Masson, Paris, 1992.