UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL, CLERMONT-FERRAND
Laboratoire de Mathématiques, UMR CNRS 6620

Thèse d'Habilitation à Diriger des Recherches en Mathématiques

Flèches d'assemblages, Conjecture de Baum-Connes et le problème du Gap-Labelling

présentée par

Hervé OYONO-OYONO,

le 8 décembre 2004 après avis de
- Saad Baaj ; Professeur à l'Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand ;
- Gennadi Kasparov ; Professeur à l'Université Vanderbilt de Nashville ;
- Georges Skandalis ; Professeur à l'Université Denis Diderot, Paris VII ;

devant le jury constitué de
- Saad Baaj ; Professeur à l'Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand ;
- Bachir Bekka ; Professeur à l'Université de Rennes ;
- Alain Connes, Professeur au Collège de France, Président du Jury ;
- Siegfried Echterhoff ; Professeur à l'Université de Münster ;
- Thierry Fack ; Professeur à l'Université Claude Bernard, Lyon I ;
- Pierre Julg ; Professeur à l'Université d'Orléans ;
- Georges Skandalis ; Professeur à l'Université Denis Diderot, Paris VII.

Flèches d'assemblages, Conjecture de Baum-Connes et le problème du Gap-Labelling

Hervé Oyono-Oyono

Laboratoire de Mathématiques,UMR CNRS 6620,

Université Blaise Pascal Clermont-Ferrand,

24 avenue des Landais, 63177 Aubière Cedex

Web: http://math.univ-bpclermont.fr/ oyono/
E-mail address: herve.oyono@math.univ-bpclermont.fr

Avant propos

Au début des années 80, P. Baum et A. Connes ont conjecturé que les groupes de K-théorie de la C^*-algébre réduite d'un groupe discret pouvait être décrits de façon géométrique via un morphisme appelé **application d'assemblage**, ayant pour source un objet de nature géométrique canoniquement associé au groupe : **la K-théorie topologique**. Cette conjecture a dès lors connu une évolution rapide. Elle a tout d'abord été montrée pour les sous-groupes discrets de $\mathrm{SO}(n,1)$ par G. Kasparov [**37**] , puis pour les sous-groupes discrets de $\mathrm{SU}(n,1)$ par P. Julg et G. Kasparov [**33**]. La célébration des 20 ans de cette conjecture a cloturé une série de résultats spectaculaires :

- à la fin des années 90, la conjecture de Baum-Connes a été demontrée pour les groupes ayant la propriété de Haagerup (en particulier les groupes moyennables) par N. Higson et G. Kasparov [**30**] ;
- au début des années 2000, la barrière de la proprété (T) de Kazdhan a été franchie par V. Lafforgue [**40**]. La conjecture de Baum-Connes a ensuite été montrée pour les groupes hyperboliques au sens de Gromov par I. Mineyev et G. Yu [**44**], puis pour les sous-groupes discrets de $\mathrm{SP}(n,1)$ par P. Julg [**32**].

Cette conjecture a été d'autre part généralisée successivement aux groupes localement compacts, aux actions de groupes par automorphismes sur des C^*-algèbres et enfin aux groupoïdes. Dans le cas des groupes presque connexes, la conjecture est connue sous le nom de conjecture de Connes-Kasparov. Elle a été montrée récemment par J. Chabert, S. Echterhoff et R. Nest [**16**]. Ces trois auteurs ont aussi montré la conjecture de Baum-Connes pour les groupes algébriques linéaires sur un corps local de caractéristique nulle. Dans le cas des actions de groupes et des groupoïdes, on sait désormais que la conjecture est fausse, des contre-exemples ayant été exhibés par N. Higson, V. Lafforgue et G. Skandalis [**31**] et par N. Ozawa. La conjecture a toutefois été vérifiée pour une très large classe d'actions de groupes et de groupoïdes et la conjecture originale (pour les groupes discrets) reste jusqu'a présent ouverte.

Dans ce manuscrit, nous étudions divers aspects de cette conjecture pouvant être regrouper selon trois axes :

- une série d'articles est consacrée à l'étude de la K-théorie topologique (dit membre de gauche de la conjecture de Baum-Connes), afin d'obtenir des propriétés de permanence de la conjecture de Baum-Connes (stabilité par passage à un sous-groupe fermé, par extensions, etc..). Ces travaux ont en grande partie été réalisés en collaboration avec J. Chabert et S. Echterhoff.
- Dans une collaboration avec M. Matthey, nous étudions la nature algébrique de l'image par l'application d'assemblage de termes provenant des surfaces.

– En général la description explicite de la K-théorie de la C^*-algèbre réduite d'un groupe ou d'un produit croisé réduit (associé a une action de groupe par automorphismes sur une C^*-algèbre) vérifiant la conjecture de Baum-Connes reste très difficile en raison de la nature hautement analytique de la flèche d'assemblage. Toutefois la combinaison de la conjecture de Baum-Connes et des formules de l'indice du type théorème de l'indice de M. F. Atiyah pour les revêtements [**2**], théorème de l'indice d'A. Connes et H. Moscovici en cohomologie cyclique [**20**] ou théorème de l'indice mesuré d'A. Connes pour les feuilletages, permettent d'avoir des informations sur la structure de ces groupes de K-théorie. Dans une collaboration avec M. Benameur, nous utilisons le théorème de l'indice pour les feuilletages pour donner une preuve de la conjecture de la trace de J. Bellissard (aussi appelée conjecture du Gap-Labelling).

Une grande partie des travaux présentés ici est l'œuvre de collaborations. Ma première rencontre avec Siegfried Echterhoff date d'une invitation à l'Université de Münster. Il m'a fait partager une partie de son savoir avec beaucoup de générosité et de patience. Je voudrais l'en remercier chaleureusement. Moulay Benameur, Jérome Chabert et Michel Matthey sont déja des vieux complices de toujours. J'ai vécu grâce à eux de nombreux moments inoubliables. Je voudrais les remercier pour toute l'aide et le soutien qu'ils m'ont apporté en de nombreuses circonstances et leurs témoigner de toute mon amitié.

Plusieurs de ces travaux ont été réalisés lors d'un séjour post-doctoral à l'Institut de Mathématiques de l'Université de Neuchâtel. Je voudrais remercier Alain Valette pour m'avoir accueilli dans son équipe.

Gennadi Kasparov avait déja accepté d'être rapporteur de ma thèse de Doctorat. Il m'a de nouveau fait le grand honneur de bien vouloir donner un avis sur ce manuscrit et je l'en remercie vivement.

Depuis le début de ma thèse de doctorat, j'ai eu le privilège de côtoyer régulièrement George Skandalis. Je suis particulièrement honoré qu'il ait accepté de rapporter sur ce manuscrit. Je voudrais aussi le remercier pour toute l'aide et les encouragements qu'il m'a apportés.

Saad Baaj est à l'origine du groupe d'algèbres d'opérateurs à Clermont-Ferrand. J'ai pu bénéficier grâce à lui d'un environnement très stimulant. Il m'a fait profiter de sa grande culture mathématique et m'a constamment encouragé. Il a aussi accepté d'être rapporteur pour cette Habilitation à Diriger des Recherches et je lui en suis extrêmement reconnaissant. Je voudrais aussi remercier à travers lui le G.D.R 0670 "Algèbres d'Opérateurs" pour tout le soutien qu'il m'a fourni.

Alain Connes m'a fait le grand honneur d'accepter de présider le jury et je lui en suis très reconnaissant.

Bachir Bekka, Thierry Fack et Pierre Julg m'ont gratifié de leurs présences dans le jury et je leurs adresse mes remerciements les plus chaleureux.

Table des matières

CHAPITRE 1

Introduction

Soit Γ un groupe discret dénombrable et soit $C^*_r(\Gamma)$ sa C^*-algèbre réduite, c'est à dire la fermeture de l'algèbre de convolution $\ell^1(\Gamma)$, vue comme sous-algèbre de $\mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))$ grâce à la représentation régulière gauche. On sait depuis [**35**] et [**45**] construire des éléments du groupe de K-théorie de $C^*_r(\Gamma)$ à partir des données géométriques suivantes :

– Un revêtement $\widetilde{M} \xrightarrow{\Gamma} M$ de groupe Γ sur une variété compacte M ;
– Un opérateur différentiel elliptique D sur M.

Cette construction d'éléments de nature géométrique apparait aussi implicitement dans [**2**] à partir du relèvement à $\widetilde{M}$ d'une paramétrix de l'opérateur différentiel elliptique D. Plus précisemment, si Q est une paramétrix pseudo-locale de D, on peut relever Q à une paramétrix $\widetilde{Q}$ de $\widetilde{D}$ tel que les opérateurs $\widetilde{S_0} := \mathrm{I} - \widetilde{Q}\widetilde{D}$ et $\widetilde{S_1} := \mathrm{I} - \widetilde{D}\widetilde{Q}$ soient des opérateurs noyaux Γ-invariants sur $\widetilde{M}$ de classe C^∞ et à support Γ-compacts. La C^*-algèbre régulière de ces noyaux est Morita équivalente à la C^*-algèbre $C^*_r(\Gamma)$ et donc la différence formelle d'idempotents

$$\left[\begin{pmatrix} \widetilde{S_0}^2 & \widetilde{S_0}(\mathrm{I}+\widetilde{S_0})\widetilde{Q} \\ \widetilde{S_1}\widetilde{D} & \mathrm{I}-\widetilde{S_1}^2 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{pmatrix}\right]$$

fournit un élément de $\mathrm{K}_0(C^*_r(\Gamma))$ appelé l'indice Γ-équivariant de D. De plus, cet élément est indépendant du choix de la paramétrix Q. Une question naturelle est alors, peut-on obtenir tous les éléments de $\mathrm{K}_0(C^*_r(\Gamma))$ de cette façon ? Une réponse à ce problème a été donnée par P. Baum et A. Connes [**3**] sous forme conjecturale.

1. L'application d'assemblage en K-homologie

Pour résoudre ce problème, on peut en fait se restreindre à des indices équivariants d'opérateurs de Dirac à coefficients dans un fibré vectoriel complexe. Rappelons qu'un opérateur de Dirac est associé à une structure spin$^{\mathrm{c}}$ sur une variété. D'autre part, la donnée d'un revêtement $\widetilde{M} \xrightarrow{\Gamma} M$ de groupe Γ est équivalente à la donnée d'une application continue $f : M \longrightarrow B_\Gamma$, où B_Γ est l'espace classifiant de Γ. Si X est un CW-complexe, alors on peut organiser les triplets (M, f, E), où

– M est une variété compacte munie d'une structure spin$^{\mathrm{c}}$;
– $f : M \longrightarrow X$ est une application continue ;
– E est fibré vectoriel complexe sur M

en un objet dual de la K-théorie de X : le groupe $\mathrm{K}_*(X)$ de K-homologie de X, avec la $\mathbb{Z}_2$-graduation donnée par la dimension modulo 2 de M.

Soit (M, f, E) un triplet définissant un élément de $\mathrm{K}_*(B_\Gamma)$. Si D_E est l'opérateur de Dirac correspondant à la structure spin$^{\mathrm{c}}$ de M à coefficient dans le fibré vectoriel E, alors l'indice Γ-équivariant de D_E ne dépend que de la classe de (M, f, E) dans $\mathrm{K}_0(B_\Gamma)$. On obtient ainsi un morphisme de groupe $\mu : \mathrm{K}_0(B_\Gamma) \longrightarrow \mathrm{K}_0(C_r^*(\Gamma))$. Ce morphisme est appelé application d'assemblage et peut être étendu au cas impair. On peut alors énoncer la conjecture de Baum-Connes dans le cas des groupes sans torsion :

Conjecture 1.1. *Soit* Γ *un groupe sans torsion. Alors*

$$\mu : \mathrm{K}_*(B_\Gamma) \longrightarrow \mathrm{K}_*(C_r^*(\Gamma))$$

est un isomorphisme.

On peut facilement voir que dans le cas des groupes finis, l'application d'assemblage n'est pas un isomorphisme. Nous donnerons plus tard une formulation de cette conjecture pour un groupe localement compact quelconque. Une des conséquences principales de l'injectivité rationnelle de l'application de l'application d'assemblage est la conjecture de Novikov :

Conjecture 1.2. *Soit* M *une variété connexe, compacte et orientée de groupe fondamental* Γ. *On désigne par* $[M]$ *sa classe fondamentale, par* $\mathbb{L}(M)$ *sa classe de Pontrjagin-Hirzebruch et par* $f : M \longrightarrow B_\Gamma$ *l'application classifiante. Alors, pour tout* $x \in \mathrm{H}^*(B_\Gamma, \mathbb{Q})$*, le nombre rationnel*

$$\langle f_*(\mathbb{L}(M) \cap [M]), x\rangle$$

est un invariant d'homotopie orientée.

Pour voir ceci, rappelons l'existence d'un caractère de Chern en K-homologie

$$\mathrm{ch}_* : \mathrm{K}_*(X) \longrightarrow \mathrm{H}_*(X, \mathbb{Q})$$

pour tout CW-complexe X, tel que pour tout triplet (M, f, E) définissant un élément de $\mathrm{K}_*(X)$,

$$\mathrm{ch}_*[(M, f, E)] = f_*\big((\mathrm{ch}^*([E]) \cdot \mathrm{Td}(M)) \cap [M]\big),$$

où

- $[M]$ est la classe fondamentale de M ;
- $\mathrm{Td}(M)$ est la classe de Todd spin^c de M, c'est à dire $\mathrm{Td}(M) := e^{c/2} \cdot \hat{A}(M)$, où la classe $\hat{A}(M)$ est le genre $\hat{A}$ de M et c est la classe de Chern canoniquement associée à la structure spin^c de M ;
- $\mathrm{ch}^* : \mathrm{K}^*(X) \longrightarrow \mathrm{H}^*(X, \mathbb{Q})$ est le caractère de Chern en K-théorie.

Par construction, le caractère de Chern en K-homologie respecte la dualité entre K-homologie et K-théorie c'est à dire que pour tout $x \in \mathrm{K}_*(X)$ et pour tout $y \in \mathrm{K}^*(X)$,

$$\langle x, y\rangle = \langle \mathrm{ch}_*(x), \mathrm{ch}^*(y)\rangle.$$

Tout opérateur différentiel elliptique sur un variété M définit une classe de K-homologie de $\mathrm{K}_0(M)$. En particulier, si M est une variété orientée, son opérateur de signature D_M^+ définit une classe de K-homologie $[D_M^+]$ de caractère de Chern $\mathbb{L}(M) \cap [M] \in \mathrm{H}_*(M, \mathbb{Q})$. Soit M une variété compacte, connexe et orientée de groupe fondamental Γ et soit $f : M \longrightarrow B_\Gamma$ son application classifiante. G. Kasparov a montré dans [**37**] que $\mu(f_*([D_M^+])) \in \mathrm{K}_0(C_r^*(\Gamma))$ était un invariant d'homotopie orientée. En conséquence, l'injectivité rationnelle de l'application d'assemblage $\mu : \mathrm{K}_0(B_\Gamma) \longrightarrow \mathrm{K}_0(C_r^*(\Gamma))$ implique l'invariance par homotopie orientée de $\mathrm{ch}_*(f_*([D_M^+])) = f_*(\mathbb{L}(M) \cap [M]) \in \mathrm{H}_*(B_\Gamma, \mathbb{Q})$.

Cette conjecture a été montré pour tout les groupes moyennable à l'infini [**29**], en particulier pour tout sous-groupe discret d'un groupe de Lie (ayant un nombre fini de composantes connexes, voir aussi [**38**]), les groupes hyperboliques au sens de Gromov (voir aussi [**20**]) et récemment pour tout sous-groupe dénombrable d'un groupe linéaire [**28**]. Une autre conséquence de l'injectivité rationnelle de l'application d'assemblage μ est la conjecture stable de Gromov-Lawson-Rosenberg sur les courbures scalaires positives.

La surjectivité de l'application d'assemblage $\mu : \mathrm{K}_0(B_\Gamma) \longrightarrow \mathrm{K}_0(C_r^*(\Gamma))$ implique la conjecture des idempotents.

CONJECTURE 1.3. *Soit* Γ *un groupe discret sans torsion, alors* $C_r^*(\Gamma)$ *n'admet pas d'idempotent non trivial.*

En effet, soit e un idempotent de $C_r^*(\Gamma)$. Quitte à remplacer e par

$$((2e^*-1)(2e-1)+1)^{\frac{1}{2}}e((2e^*-1)(2e-1)+1)^{-\frac{1}{2}},$$

on peut supposer que e est autoadjoint. Si l'application d'assemblage μ est surjective, alors en particulier la classe de e dans $\mathrm{K}_0(C_r^*(\Gamma))$ peut-être réalisée comme l'indice équivariant d'un opérateur différentiel elliptique D sur la base d'un revêtement $\widetilde{M} \xrightarrow{\Gamma} M$ de groupe Γ, où M est une variéte compacte. Soit τ la trace canonique sur $C_r^*(\Gamma)$, alors τ est une trace fidèle et d'après le théorème de l'indice pour les revêtement [**2**], $\tau(e)$ est égal à l'indice de Fredholm de l'opérateur D et donc en particulier $\tau(e)$ est entier. Comme d'autre part e est un projecteur, $\tau(e) \in [0,1]$, par fidélité de la trace, le projecteur e est trivial.

2. Assemblage en petit degré

Pour tout CW-complexe X, le caractère de Chern en K-homologie

$$\mathrm{ch}_* : \mathrm{K}_*(X) \longrightarrow \mathrm{H}_*(X,\mathbb{Q})$$

est un isomorphisme rationnel. En petit degré ($i = 0,1,2$), il existe un morphisme $\beta_i : \mathrm{H}_i(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{K}_i(X)$ qui est une section rationnelle du caractère de Chern en K-homologie. Dans cette section, nous allons construire l'image par l'application d'assemblage μ d'éléments $\beta_i(x)$ pour $x \in \mathrm{H}_i(X,\mathbb{Z})$ et $i = 1,2$. La construction est due dans le cas $i = 1$ à A. Valette [**56**, Chapter 7] et dans le cas $i = 2$ à une de mes collaborations avec M. Matthey [**43**].

2.1. Le cas $i = 1$. Le groupe $\mathrm{H}_1(X,\mathbb{Z})$ s'identifie avec l'abélianisé du groupe fondamental $\pi_1(X)$. Désignons par $\mathbb{S}_1$ le cercle unité et soit $f : \mathbb{S}_1 \longrightarrow X$ une application continue pointée. Alors le triplet $(\mathbb{S}_1, f, \mathbb{S}_1 \times \mathbb{C})$ définit un élément de $\mathrm{K}_1(X)$ et

$$\pi_1(X) \ni [f] \mapsto [(\mathbb{S}_1, f, \mathbb{S}_1 \times \mathbb{C})] \in \mathrm{K}_1(X)$$

définit un morphisme du groupe $\pi_1(X)$ vers le groupe abélien $\mathrm{K}_1(X)$ et donc par passage à l'abélinisé un morphisme $\mathrm{H}_1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{K}_1(X)$ [**56**, Chapter 7]. L'espace classifiant B_Γ a pour groupe fondamental Γ et donc $\mathrm{H}_1(B_\Gamma,\mathbb{Z}) \cong \Gamma/[\Gamma,\Gamma]$.

PROPOSITION 2.1. [**49**] *Modulo les identifications ci-dessus,* $\mu \circ \beta_1$ *correspond au morphisme*

$$\Gamma/[\Gamma,\Gamma] \longrightarrow \mathrm{K}_1(C_r^*(\Gamma))$$

induit par l'inclusion $\Gamma \hookrightarrow U_1(C_r^*(\Gamma))$ *du groupe* Γ *dans le groupe* $U_1(C_r^*(\Gamma))$ *des unitaires de* $C_r^*(\Gamma)$.

Théorème 2.2. [**25**] *Le morphisme $\mu \circ \beta_1$ est rationnellement injectif.*

2.2. Le cas $i = 2$. On rappelle que si Σ est une surface orientée compacte, alors $\mathrm{K}_0(\Sigma) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, et on obtient les deux générateurs canoniques de la façon suivante : le premier générateur provient de l'inclusion d'un point de Σ. Pour décrire le second générateur, munissons Σ d'une structure spin quelconque (par exemple en plongeant Σ dans $\mathbb{R}^3$), alors la classe du triplet $(\Sigma, \mathrm{Id}_\Sigma, \Sigma \times \mathbb{C})$ dans $\mathrm{K}_0(\Sigma)$ est indépendante de la structure spin choisie et fournit le second générateur canonique de $\mathrm{K}_0(\Sigma)$.

Proposition 2.3. [**42**] *Soit X un CW-complexe. Alors il existe un unique morphisme naturel*

$$\beta_2 : \mathrm{H}_2(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{K}_*(X)$$

telle que pour toute surface compacte orientée Σ de classe fondamentale $[\Sigma]$, alors

$$\beta_2([\Sigma]) = [(\Sigma, \mathrm{Id}_\Sigma, \Sigma \times \mathbb{C})].$$

Remarque 2.4. Pour toute classe x de $\mathrm{H}_2(X, \mathbb{Z})$, il existe une surface de genre $g \geq 1$ et $f : \Sigma \longrightarrow X$ continue tels que $x = f_*([\Sigma])$. On a donc $\beta_2(x) = [(\Sigma, f, \Sigma \times \mathbb{C})]$.

Rappelons que par périodicité de Bott,

$$\mathrm{K}_0(C^*_r(\Gamma)) \cong \pi_1(\mathrm{U}(C^*_r(\Gamma)))),$$

où

$$\mathrm{U}(C^*_r(\Gamma))) = \lim_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{U}_n(C^*_r(\Gamma))$$

est la limite inductive sur les groupes $\mathrm{U}_n(C^*_r(\Gamma))$ des unitaires de $\mathrm{M}_n(C^*_r(\Gamma))$. Nous allons construire, pour tout $x \in \mathrm{H}_2(B_\Gamma, \mathbb{Z})$, l'image par l'application d'assemblage μ de $\beta_2(x)$ comme un élément de $\pi_1(\mathrm{U}(C^*_r(\Gamma))))$. Pour tout unitaire $u \in C^*_r(\Gamma)$ et tout $t \in [0, 1]$, on définit les matrices unitaires

$$R(t,\, u) := \begin{pmatrix} \cos^2(\pi t/2) + u \sin^2(\pi t/2) & (u-1)\cos(\pi t/2)\sin(\pi t/2) \\ (1-u^*)\cos(\pi t/2)\sin(\pi t/2) & \cos^2(\pi t/2) + u^* \sin^2(\pi t/2) \end{pmatrix} \in \mathrm{U}_2(C^*_r(\Gamma)),$$

$$R_{12}(t,\, u) := \begin{pmatrix} R(t,\, u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{U}_3(C^*_r(\Gamma)),$$

et $R_{13}(t,\, u) \in \mathrm{U}_3(C^*_r(\Gamma))$ obtenue à partir de $R_{12}(t,\, u)$ en échangeant la deuxième et la troisième ligne.

Rappelons l'identification $\mathrm{H}_*(B_\Gamma, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{H}_*(\Gamma, \mathbb{Z})$. Nous allons utiliser la description de $\mathrm{H}_2(\Gamma, \mathbb{Z})$ par la formule de Hopf : si

$$1 \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$$

est un présentation de Γ où F est un groupe libre, alors

$$\mathrm{H}_2(\Gamma, \mathbb{Z}) \cong ([F, F] \cap R)/[R, F].$$

Pour tout $\gamma \in F$, on désigne par $\dot\gamma$ l'image de γ dans $\Gamma \cong F/R$. Soit $2n$ éléments $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{2n-1}, \gamma_{2n}$ de F tels que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} [\gamma_{2i-1}, \gamma_{2i}] \in [F, F] \cap R$, alors

$$t \mapsto \prod_{i=1}^{n} [R_{12}(t, \dot\gamma_{2i-1}), R_{13}(t, \dot\gamma_{2i})]$$

est un lacet de $\mathrm{U}_3(C_r^*(\Gamma))$.

THÉORÈME 2.5. [**43**] *Avec les notations ci-dessus et modulo l'identification*

$$([F,F]\cap R)/[R,F] \cong \mathrm{H}_2(B_\Gamma,\mathbb{Z}),$$

l'image de $\prod_{i=1}^{n}[\gamma_{2i-1},\gamma_{2i}]$ *par* $\mu\circ\beta_2$ *est égale à la classe de*

$$t \mapsto \prod_{i=1}^{n}[R_{12}(t,\dot\gamma_{2i-1}),R_{13}(t,\dot\gamma_{2i})]$$

dans $\pi_1(\mathrm{U}(C_r^*(\Gamma)))) \cong K_0(C_r^*(\Gamma))$.

REMARQUE 2.6. [**43**]

(1) Avec les notations ci-dessus, la classe de

$$t \mapsto \prod_{i=1}^{n}[R_{12}(t,\dot\gamma_{2i-1}),R_{13}(t,\dot\gamma_{2i})]$$

dans $\pi_1(\mathrm{U}(C_r^*(\Gamma))))$ est l'image par la composée

$$\mathrm{K}_2^a(\mathbb{Z}[\Gamma]) \longrightarrow \mathrm{K}_2^a(C_r^*(\Gamma)) \longrightarrow \mathrm{K}_2^t(C_r^*(\Gamma))$$

du produit des symboles de Steinberg $\prod_{i=1}^{n}\{\dot\gamma_{2i-1},\dot\gamma_{2i}\}$, où
- $\mathrm{K}_2^a(\bullet)$ est le deuxième groupe de K-théorie algébrique ;
- $K_2^t(\bullet) := \pi_1(\mathrm{U}(\bullet)))$ est le deuxième groupe de K-théorie topologique d'une C^*-algèbre, isomorphe par périodicité de Bott à $K_0(\bullet)$

(2) Si Γ est un groupe à une relation sans torsion ou un groupe de nœud, alors

$$\beta_2 : \mathrm{H}_2(B_\Gamma,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{K}_*(B_\Gamma)$$

est injective. De plus, dans ces deux cas, Γ vérifie la conjecture de Baum-Connes [**50**] et donc

$$\beta_2\circ\mu : \mathrm{H}_2(\Gamma,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{K}_*(C_r^*(\Gamma))$$

est injective.

3. Indices équivariants généralisés

Lorsqu'un groupe discret Γ agit sur un espace localement compact X, la construction d'indices Γ-équivariants peut être étendue aux opérateurs longitudinalement elliptiques et on obtient ainsi des indices longitudinaux à valeur dans la K-théorie du produit croisé réduit de $C_0(X)$ par Γ. Dans le chapitre 2, nous utiliserons cette construction pour résoudre le problème du Gap-Labelling des quasi-cristaux. L'algèbre associée à un quasi-cristal est en effet un produit croisé $C(\Omega)\times\mathbb{Z}^p$, où Ω est un espace de Cantor muni d'un action de $\mathbb{Z}^p$. Le Gap-Labelling, ou étiquetage des sauts d'énergie, formalisé par J. Bellissard se ramène alors au calcul par l'image sous la trace induite par une mesure invariante sur Ω, du groupe $\mathrm{K}_0(C(\Omega)\times\mathbb{Z}^p)$. Les éléments de ce groupe proviennent tous d'indices longitudinaux d'opérateurs de Dirac sur les feuilles de la lamination $\frac{\mathbb{R}^p\times\Omega}{\mathbb{Z}^p}$ (car le groupe $\mathbb{Z}^p$ vérifie la conjecture de Baum-Connes).

Le problème du Gap-Labelling se réduit donc à un problème d'indice. Nous résolvons ce problème en utilisant le théorème de l'indice mesuré pour les feuilletages d'A. Connes [**19**].

Plus généralement, si G est un groupe localement compact et A une C^*-algèbre munie d'une action fortement continue de G par automorphismes, la conjecture de Baum-Connes prédit le calcul de la K-théorie du produit croisé $A \rtimes_r G$ au moyen d'indices équivariants généralisés. La notion adéquate pour la construction de tels indices équivariants est la notion d'action propre de groupe. Nous avons donc besoin pour définir l'objet géométrique à la source de l'application d'assemblage d'un espace qui "classifie" les actions propres d'un groupe G localement compact : l'exemple universel pour les actions propres d'un groupe. Cet espace joue pour les actions propres le même rôle que le revêtement du classifiant B_Γ dans le cas des revêtements de groupe (discret) Γ.

Definition 3.1. Soit $\mathcal{E}(G)$ un espace localement compact muni d'une action propre d'un groupe locallement compact G. On dit que $\mathcal{E}(G)$ est un exemple universel pour les actions propres de G si, pour tout espace topopologique X muni d'une action propre de G, il existe une application continue G-équivariante de X dans $\mathcal{E}(G)$, et cette application est unique à homotopie près.

Remarque 3.2.

(1) Pour tout groupe localement compact, il existe un exemple universel pour les actions propres de G [**3**] ;

(2) Si $\mathcal{E}(G)$ et $\mathcal{E}'(G)$ sont deux exemples universels pour les actions propres du groupe G, alors ils sont G-homotopes.

On a la caractérisation suivante des exemples universels pour les actions propres :

Proposition 3.3. [**3, 39**] *Soit Z un espace topologique sur lequel G agit proprement. On munit $Z \times Z$ de l'action diagonale de G. Alors Z est un exemple universel pour les actions propres de G si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :*

(1) *Pour tout sous-groupe compact $K \subset G$, il existe $p \in Z$ tel que $k.p = p$ pour tout $k \in K$;*

(2) *Les deux projections canoniques p_0 et p_1 de $Z \times Z$ dans Z sont G-homotopes.*

En particulier, si $\mathcal{E}(G)$ est un exemple universel pour les actions propres de G, c'est aussi un exemple universel pour les actions propres de tout sous-groupe fermé de G.

Nous allons maintenant définir la source de l'application d'assemblage (ou membre de gauche de la conjecture de Baum-Connes)

Definition 3.4. Soit G un groupe localement compact et soit A une C^*-algèbre munie d'une action fortement continue de G par automorphismes. La K-théorie topologique de G à coefficients dans A est alors définie par

$$\mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G; A) := \lim_{X \subseteq \mathcal{E}(G)} \mathrm{KK}_*^G(C_0(X), A),$$

où

– $\mathrm{KK}_*^G(\bullet, \bullet)$ est le foncteur bivariant de KK-théorie équivariante de Kasparov ;
– la limite inductive est prise sur les parties G-compactes X de $\mathcal{E}(G)$.

Pour toute partie G-compacte X, on désigne par $[p_X]$ la classe dans $\mathrm{K}_*(C_0(X) \rtimes G)$ canoniquement associée à l'action propre de G sur X. Le morphisme

$$\mathrm{KK}_*^G(C_0(X), A) \ni x \mapsto [p_X] \otimes J_G(x) \in \mathrm{K}_*(A \rtimes_r G),$$

J_G étant l'application de descente de Kasparov, est compatible avec la limite inductive sur les parties G-compactes de $\mathcal{E}(G)$. On définit ainsi un morphisme

$$\mu_A : \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G; A) \longrightarrow \mathrm{K}_*(A \rtimes_r G)$$

appelé *l'application d'assemblage de Baum-Connes.*

CONJECTURE 3.5. **(P. Baum, A. Connes)**
L'application d'assemblage

$$\mu_A : \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G; A) \longrightarrow \mathrm{K}_*(A \rtimes_r G)$$

est un isomorphisme.

Il est désormais clair que cette conjecture n'est pas vérifiée pour toute paire (G, A) (voir [**31**]). Mais elle a été vérifiée pour une large classe de groupes G et de coefficients A. En particulier elle a été vérifiée dans les cas suivants :

– Les groupes ayant la propriété de Haagerup avec des coefficients arbitraires [**30, 55**] ;
– Les groupes hyperboliques au sens de Gromov avec des coefficients arbitraires [**41**] ;
– Les groupes $\mathrm{Sp}(n, 1)$ avec des coefficients arbitraires [**32**] ;
– Les groupes presque connexes (en particulier les groupes de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes) et les groupes algébriques linéaires sur un corps local de caractéristique nulle, à coefficients dans $\mathbb{C}$ [**16**].

La conjecture de Baum-Connes à coefficients est stable par passage aux sous-groupes fermés [**13, 17, 50**]. Pour les groupes discrets, elle est héréditaire par action sur des arbres [**50**]. Ces résultats de stabilité ont été montrés en utilisant la propriété de descente de la K-théorie topologique d'un groupe. Dans le chapitre 3, nous développons un cadre formel afin de pouvoir appliquer ces techniques de descente et montrer des propriétés de permanence de la conjecture de Baum-Connes. En particulier nous étudions la stabilité par extensions, le lien avec la formule de Künneth en K-théorie et nous en déduisons la conjecture de Baum-Connes pour les groupes adéliques en caractéristique nulle.

CHAPITRE 2

Le Gap-Labelling pour les quasi-cristaux

La physique des milieux apériodiques s'est développée à la suite d'une découverte faite en 1984, par D. Shechtman, I. Bletch D. Gratias et D. Cahn : lors du refroidissement rapide d'un alliage Aluminium-Manganèse est apparue une phase de type cristallin, qui présentait une figure de diffraction avec une symétrie d'ordre cinq. Ceci a engendré un énorme intérêt en physique des solides : cette symétrie est interdite pour des cristaux de dimension trois et ces phases sont obtenues en brisant la symétrie d'un cristal de dimension supérieure. Les sites atomiques forment alors un réseau quasi-periodique appelé quasi-cristal.

Les propriétés macroscopiques de ces milieux apériodiques sont directement reliées à l'allure du spectre de l'opérateur de Schrödinger qu'on leur associe. Ce spectre présente en général des sauts d'énergie qu'il est crucial de pouvoir repérer afin de pouvoir déterminer les bandes d'énergie autorisées pour les électrons de conduction. C'est le problème du gap labelling (étiquetage des sauts d'énergie), remarquablement formalisé en termes mathématiques par J. Bellissard de la façon suivante :

Soit l'opérateur de Schrödinger sur $\mathbb{R}^p$ donné par $H = -\frac{h^2}{2m}\Delta + V$. Si H décrit une particule dans un milieu homogène, les propriétés physiques de ce milieu ne dépendent pas du choix de l'origine. L'algèbre des observables $C^*(H)$ est alors la plus petite sous-algèbre d'opérateurs de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^p)$ invariantes par translations et contenant les fonctions de H s'annulant à l'infini. J. Bellissard à associé à cet opérateur de Schrödinger un espace compact X_H, appelé l'enveloppe de H et muni d'une action de $\mathbb{R}^p$ tel que le produit croisé $C(X_H) \rtimes \mathbb{R}^p$ contienne $C^*(H)$ [**5**]. Cet espace X_H est défini comme étant la fermeture forte dans $\mathcal{B}(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^p))$ de la famille

$$\{T_a(H - z\,\mathrm{Id})^{-1}T_{-a}\,, \quad a \in \mathbb{R}^p\},$$

où z est un nombre complexe fixé appartenant à l'ensemble résolvant de H. L'action de $\mathbb{R}^p$ sur X_H se fait par translations et à un homéomorphisme $\mathbb{R}^p$-équivariant près, l'espace X_H est indépendant du choix de z dans l'ensemble résolvant de H.

Un potentiel typique pour un électron de conduction dans un tel milieu est

$$V(x) = \sum_{y\in L} v(x-y),$$

où

– L est l'ensemble des positions d'équilibre des atomes ;

– v est le *potentiel effectif pour un électron de valence* près d'un site atomique ([**8**]).

Cet ensemble L est *uniformément discret*, c'est-à-dire qu'il existe deux réels strictement positif r et R tels que toute boule de rayon r contienne au plus un élément de L et toute boule de rayon R contienne au moins un élément de L. J. Bellissard a associé à cet ensemble L un espace compact X_L muni d'une action minimale de $\mathbb{R}^p$, tel que l'algèbre des observables

$C^*(H)$ soit contenue dans le produit croisé $C(X_L) \rtimes \mathbb{R}^p$. L'espace X_L s'appelle l'enveloppe de L et est construit comme suit : soit ν_L la mesure sur $\mathbb{R}^p$ définie pour toute fonction continue à support compact f par $\nu_L(f) = \sum_{y \in L} f(y)$. Alors X_L est par définition la fermeture $*-$faible de la famille des translatés de ν_L par des éléments de $\mathbb{R}^p$. Les éléments de X_L sont des mesures à supports dans des ensembles uniformément discrets de $\mathbb{R}^p$. Remarquons que $V = \nu_L * v$ et plus généralement, pour tout $\nu \in X_L$, on pose :

$$H_\nu = -\frac{h^2}{2m}\Delta + \nu * v.$$

Fixons un complexe z dans l'ensemble résolvant de l'opérateur H. L'application

$$\nu \in X_L \mapsto (H_\nu - z\,\mathrm{Id})^{-1} \in X_H$$

est alors continue, équivariante et surjective [**8**]. En conséquence le produit croisé $C(X_H) \rtimes \mathbb{R}^p$ est contenu dans le produit croisé $C(X_L) \rtimes \mathbb{R}^p$ et donc $C(X_L) \rtimes \mathbb{R}^p$ contient l'algèbre des observables $C^*(H)$.

L'avantage principal de travailler avec X_L plutôt qu'avec $C^*(H)$ est que cet espace ne dépend que de la géométrie de L. Par exemple, si L est un réseau $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}^p$, alors l'enveloppe de L est $\mathbb{R}^p/\mathcal{R}$. Rappelons que dans ce cas, le calcul de $C^*(H)$ s'effectue en utilisant la théorie de Bloch [**5**] et on obtient ainsi $C^*(H) = C(B) \otimes \mathcal{K}$, où

- $\mathcal{K}$ est la C^*-algèbre des opérateurs compacts sur un espace de Hilbert séparable ;
- B est la zone de Brillouin définie par $B = \mathbb{R}^p/\mathcal{R}^*$, $\mathcal{R}^*$ êtant le réseau dual de $\mathcal{R}$.

La densité intégrée d'états [**5**] associée à H est l'application $E \mapsto \mathcal{N}(E)$, où $\mathcal{N}(E)$ est le nombre d'états de valeur propre (ou d'énergie) inférieur ou égale à E par unité de volume.

Le résultat remarquable de J. Bellissard, D. J. L. Herrmann et M. Zarrouati [**8**] est que cette densité intégrée d'états, évaluée sur les sauts d'energie de H, est à valeurs dans un sous-groupe dénombrable de $\mathbb{R}$ ne dépendant que de l'ensemble L. Plus précisemment, soit $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité ergodique et $\mathbb{R}^p$-invariante sur X_L, alors $\mathbb{P}$ définit une trace $\tau^{\mathbb{P}}$ sur $C(X_L) \rtimes \mathbb{R}^p$ s'étendant à son algèbre de Von-Neumann $\mathrm{L}^\infty(X_L) \rtimes \mathbb{R}^p$. Soit $\chi_{]-\infty,E]}$ la fonction caractéristique de $]-\infty, E]$. Alors $\chi_{]-\infty,E]}(H)$ appartient à l'algèbre de von-Neumann $\mathrm{L}^\infty(X_L) \rtimes \mathbb{R}^p$. J. Bellissard a établi dans [**5**] la *formule de Shubin* pour H :

$$\mathcal{N}(E) = \tau^{\mathbb{P}}(\chi_{]-\infty,E]}(H)).$$

En particulier, si E est un saut spectral de H, alors $\chi_{]-\infty,E]}$ est en fait une fonction continue sur le spectre de l'opérateur semi-borné H et donc, $\chi_{]-\infty,E]}(H)$ est un idempotent de $C(X_L) \rtimes \mathbb{R}^p$. D'après la formule de Shubin, la densité intégrée d'états $\mathcal{N}$ prend pour les sauts spectraux de H des valeurs dans l'image

$$\tau^{\mathbb{P}}_* : \mathrm{K}_0(C(X_L) \rtimes \mathbb{R}^p) \to \mathbb{R}\,,$$

où $\tau^{\mathbb{P}}_*$ est le morphisme induit en K-théorie par la trace $\tau^{\mathbb{P}}$.

Intéressons nous dorénavant au cas où L est un quasi-cristal construit par la méthode *cut-and -project* [**24**]. Soit Ω_L la transversale canonique des mesures de X_L dont le support contient l'origine. Alors [**7, 8**]

- Ω_L est un Cantor ;
- La restriction de $(X_L, \mathbb{R}^p)$ à Ω_L est donnée par une action minimale de $\mathbb{Z}^p$ sur Ω_L ;
- X_L est $\mathbb{R}^p$-homéomorphe au mapping torus $\frac{\mathbb{R}^p \times \Omega_L}{zp}$ de l'action de $\mathbb{Z}^p$ sur Ω_L ;

– il existe une mesure $\mathbb{Z}^p$-invariante μ sur Ω_L tel que $\mathbb{P}$ soit donnée par le produit de μ et de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^p$;

En particulier,

$$\tau_*^{\mathbb{P}}(\mathrm{K}_0(C(X_L) \rtimes \mathbb{R}^p)) = \tau_*^{\mu}(\mathrm{K}_0(C(\Omega_L) \rtimes \mathbb{Z}^p)),$$

où τ^μ est la trace sur $C(\Omega_L) \rtimes \mathbb{Z}^p$ induite par μ. Pour un quasi-cristal, le problème du Gap-Labelling se ramène donc au calcul de l'image par le morphisme induit par la trace τ_μ de $\mathrm{K}_0(C(\Omega_L) \rtimes \mathbb{Z}^p)$.

1. Calculs en basse dimension

Soit Ω un espace de Cantor muni d'une action de $\mathbb{Z}^p$ et d'une mesure invariante μ. L'action de $\mathbb{Z}^p$ sur Ω induit une action de $\mathbb{Z}^p$ sur la C^*-algèbre $C(\Omega)$ des fonctions continues à valeurs complexes sur Ω. On peut alors former le produit croisé $C(\Omega) \rtimes \mathbb{Z}^p$. La mesure μ induit une trace τ^μ sur la C^*-algèbre $C(\Omega) \rtimes \mathbb{Z}^p$ et on obtient ainsi un morphisme

$$\tau_*^{\mu} : \mathrm{K}_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{Z}^p) \to \mathbb{R}\,.$$

Dans la suite, on désigne par

– $\mathbb{Z}[\mu]$ le sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ engendré par les μ-mesures des compacts-ouverts de Ω ;
– $C(\Omega, \mathbb{Z})$ l'algèbre des fonctions continues à valeurs entières ;
– $C(\Omega, \mathbb{Z})_{\mathbb{Z}^p}$ l'espace des coinvariants de $C(\Omega, \mathbb{Z})$ pour l'action de $\mathbb{Z}^p$ c'est à dire le quotient de $C(\Omega, \mathbb{Z})$ par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $n(f) - f$, où $f \in C(\Omega, \mathbb{Z})$.

Dans ce qui suit, on fait l'hypothèse que Ω n'a pas de compacts-ouverts invariants non triviaux (ce qui est le cas pour les actions minimales).

Cas $p = 1$ [**22**] **:** rappelons l'existence pour toute C^*-algèbre A munie d'une action de $\mathbb{Z}$ de la suite exacte à six termes de Pimsner-Voiculescu [**52**]

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K}_0(A) \arrow[r, "\alpha^* - \mathrm{Id}"] & \mathrm{K}_0(A) \arrow[r, "i_*"] & \mathrm{K}_0(A \rtimes \mathbb{Z}) \arrow[d] \\
\mathrm{K}_1(A \rtimes \mathbb{Z}) \arrow[u] & \mathrm{K}_1(A) \arrow[l, "i_*"'] & \mathrm{K}_1(A) \arrow[l, "\alpha^* - \mathrm{Id}"']
\end{tikzcd},$$

où

– si on désigne par α l'automorphisme de A correspondant à l'action du générateur de $\mathbb{Z}$, α_* est le morphisme induit en K-théorie par α ;
– i_* est le morphisme induit en K-théorie par l'inclusion $i : A \hookrightarrow A \rtimes \mathbb{Z}$.

Le Cantor Ω étant une limite projective topologique d'espaces finis, la K-théorie de $C(\Omega)$ se calcule aisement par limite inductive. On obtient alors

$$\mathrm{K}_0(C(\Omega)) = C(\Omega, \mathbb{Z}) \text{ et } \mathrm{K}_1(C(\Omega)) = 0.$$

La suite exacte à six-termes de Pimsner-Voiculescu nous donne alors un isomorphisme $C(\Omega, \mathbb{Z})_{\mathbb{Z}} \simeq K_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{Z})$ induit par l'inclusion $C(\Omega, \mathbb{Z}) \hookrightarrow C(\Omega) \rtimes \mathbb{Z}$.

Le calcul de la trace donne donc dans ce cas,

$$\tau_*^{\mu}(\mathrm{K}_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{Z})) = \mathbb{Z}[\mu].$$

Cas $p = 2$ [**7, 57**] **:** le calcul de $\mathrm{K}_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{Z}^2)$ peut s'effectuer en utilisant deux fois la suite de Pimsner-Voiculescu. Le résultat est le suivant :

$$\mathrm{K}_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{Z}) \simeq C(\Omega, \mathbb{Z})_{\mathbb{Z}^2} \oplus \mathbb{Z}.$$

Plus précisemment :

– l'inclusion $C(\Omega, \mathbb{Z})_{\mathbb{Z}^2} \hookrightarrow \mathrm{K}_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{Z}^2)$ est induite par l'inclusion $C(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega) \rtimes \mathbb{Z}^2$;

– l'inclusion $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathrm{K}_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{Z}^2)$ envoie le générateur canonique de $\mathbb{Z}$ sur l'image du générateur de Bott du tore $\mathbb{T}^2$ par le morphisme induit par l'inclusion $C(\mathbb{T}^2) \simeq C_r^*(\mathbb{Z}^2) \hookrightarrow C(\Omega) \rtimes \mathbb{Z}^2$.

Rappelons que le générateur de Bott de $\mathrm{K}_0(C(\mathbb{T}^2)) \simeq \mathrm{K}^0(\mathbb{T}^2)$ est l'unique élément dont le caractère de Chern en K -théorie est égal à la classe de la forme volume de $\mathbb{T}^2$. En particulier, sa trace (qui correspond à la composante de degré zéro du caractère de Chern) est nulle, donc

$$\tau_*^\mu(\mathrm{K}_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{Z}^2)) = \mathbb{Z}[\mu].$$

Cas $p = 3$ **:** l'image par la trace de $\mathrm{K}_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{Z}^3)$ a été calculée dans [**9**] et donne aussi

$$\tau_*^\mu(\mathrm{K}_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{Z}^3)) = \mathbb{Z}[\mu].$$

Ces calculs ont amené J. Bellissard à poser la conjecture suivante :

Conjecture 1.1. *pour tout* $p \geq 1$,

$$\tau_*^\mu(\mathrm{K}_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{Z}^p)) = \mathbb{Z}[\mu].$$

Nous donnons une preuve de cette conjecture en utilisant le théorème de l'indice mesuré pour les feuilletages dû, à A. Connes.

Signalons que deux autres preuves de cette conjecture ont été obtenues simultanément à la nôtre de manières indépendantes [**6**] et [**34**]. La première utilise les variétés branchées, la seconde est similaire à la nôtre mais utilise les techniques de transfert.

2. Mapping Torus et Indice longitudinal

Quitte à rajouter une action triviale de $\mathbb{Z}$, on peut supposer p pair sans changer le calcul de la trace. Nous supposerons désormais que p est pair. La suspension associée est par définition l'espace compact $V_\Omega = \frac{\Omega \times \mathbb{R}^p}{\mathbb{Z}^p}$. Cet espace est naturellement muni d'une structure d'espace feuilleté. On notera dans la suite $C^{\infty,0}(V_\Omega)$ l'algèbre des fonctions continues sur V_Ω qui sont longitudinalement lisses. Cette algèbre est une sous-algèbre dense de $C(V_\Omega)$ stable par calcul fonctionnel holomorphe. En particulier tout idempotent de $\mathrm{M}_n(C(V_\Omega))$ est équivalent à un idempotent de $\mathrm{M}_n(C^{\infty,0}(V_\Omega))$ et l'inclusion $C^{\infty,0}(V_\Omega) \hookrightarrow C(V_\Omega)$ induit un isomorphisme $\mathrm{K}_0(C^{\infty,0}(V_\Omega)) \cong \mathrm{K}_0(C(V_\Omega))$. Soit $\partial : C^\infty(\mathbb{R}^p) \otimes S^+ \to C^\infty(\mathbb{R}^p) \otimes S^-$ l'opérateur de Dirac sur $\mathbb{R}^p$, où S^+ et S^- sont les représentations irréductibles de $\mathrm{Spin}(p)$. Soit e un projecteur de $\mathrm{M}_n(C^{\infty,0}(V_\Omega))$ et soit $\tilde{e}$ le projecteur $\mathbb{Z}^p$-invariante de $\mathrm{M}_n(C_0(\Omega \times \mathbb{R}^p))$ qui lui correspond. L'opérateur

$$\tilde{e} \circ (\mathrm{Id}_{C(\Omega)} \otimes \partial \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}) : \tilde{e}(C(\Omega) \otimes C^\infty(\mathbb{R}^p) \otimes S^+ \otimes \mathbb{C}^n) \longrightarrow \tilde{e}(C(\Omega) \otimes C^\infty(\mathbb{R}^p) \otimes S^- \otimes \mathbb{C}^n)$$

est un opérateur differentiel elliptique suivant $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{Z}^p-$invariant. Il induit donc un opérateur longitudinalement elliptique $\partial^e_{\Omega,\mathbb{R}^p}$ sur V_Ω. En utilisant les résultats de [**21**] et la version étendue de [**48**], on associe à l'opérateur $\partial^e_{\Omega,\mathbb{R}^p}$ un indice longitudinal $\mathrm{Ind}_{V_\Omega}\,\partial^e_{\Omega,\mathbb{R}^p}$ qui appartient au groupe de K-théorie $\mathrm{K}_0(C(\Omega)\rtimes\mathbb{Z}^p)$. Le théorème suivant est dû à A. Connes (voir [**19**] et aussi [**10**]).

THÉORÈME 2.1. *L'application* $e\mapsto \mathrm{Ind}_{V_\Omega}\,\partial^e_{\Omega,\mathbb{R}^p}$ *induit un isomorphisme*

$$\mathrm{K}_0(C(V_\Omega))\xrightarrow{\simeq}\mathrm{K}_0(C(\Omega)\rtimes\mathbb{Z}^p).$$

Ce théorème ramène la conjecture de Bellissard au problème du calcul de l'image par τ^μ_* de $\mathrm{Ind}_{V_\Omega}\,\partial^e_{\Omega,\mathbb{R}^p}$, c'est à dire un problème d'indice. Pour le résoudre, il nous faut introduire :
– un complexe différentiel adéquat servant de réceptacle pour définir des classes caractérisques adaptées à ce problème d'indice ;
– un cycle fondamental afin d'intégrer les formes différentielles de degré maximal.

3. Cohomologie longititudinale et caractère de Chern longitudinal

Soit $\Omega^k(\mathbb{R}^p)$ l'espace vectoriel des k-formes differentielles de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^p$.

DEFINITION 3.1. Une k-forme longitudinale sur V_Ω est une application continue $\mathbb{Z}^p$-équivariante $\phi:\Omega\longrightarrow\Omega^k(\mathbb{R}^p)$.

L'espace des k-formes longitudinales sur V_Ω est noté $\Omega^k_\ell(V_\Omega,\mathbb{R})$. Si ϕ est un élément de $\Omega^k_\ell(V_\Omega,\mathbb{R})$, alors la différentielle longitudinale $d_\ell(\phi)$ est par définition la $(k+1)$-forme longitudinales $\omega\mapsto d(\phi(\omega))$ où d est la différentielle de de Rham sur $\mathbb{R}^p$. Le complexe ainsi obtenu est le complexe longitudinale de V_Ω, sa cohomologie est notée

$$\mathrm{H}^*_\ell(V_\Omega,\mathbb{R})=\bigoplus_{k\geq 0}\mathrm{H}^k_\ell(V_\Omega,\mathbb{R})=\mathrm{H}^e_\ell(V_\Omega,\mathbb{R})\bigoplus\mathrm{H}^o_\ell(V_\Omega,\mathbb{R})$$

(les superscripts e et o désignent respectivement les parties paire et impaire). Le caractère de Chern peut maintenant se définir en utilisant la théorie de Chern-Weil. Soit e un projecteur de $\mathrm{M}_n(C^{\infty,0}(V_\Omega))$ et soit $\tilde e$ le projecteur $\mathbb{Z}^p$-invariant associé. Alors la forme différentielle $\mathrm{Tr}\ \tilde e\exp\left(\frac{d_\ell\tilde e d_\ell\tilde e}{2i\pi}\right)$ est une forme longitudinale qui est d_ℓ-fermée. De plus, la classe de $\mathrm{Tr}\ \tilde e\exp\left(\frac{d_l\tilde e d_l\tilde e}{2i\pi}\right)$ dans $\mathrm{H}^*_\ell(V_\Omega,\mathbb{R})$ ne dépend que de la classe de K-théorie de e dans $\mathrm{K}_0(C^{\infty,0}(V_\Omega))$. On définit donc ainsi un morphisme appelé caractère de Chern longitudinal

$$\mathrm{ch}_\ell:\mathrm{K}_0(C(V_\Omega))\longrightarrow\mathrm{H}^e_\ell(V_\Omega,\mathbb{R}).$$

4. Le cycle fondamental

Soit χ la fonction caractéristique de l'ouvert $U=]0,1[^p$ dans $\mathbb{R}^p$. On définit

$$C_{\mu,\mathbb{Z}^p}:\Omega^p_\ell(V_\Omega,\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R},$$

par :

$$C_{\mu,\mathbb{Z}^p}(\phi):=\langle\mu\otimes\int_{\mathbb{R}^p},\ \chi\phi\rangle.$$

PROPOSITION 4.1. [**10**] *Si* ϕ *est un* $d_\ell-$*cobord, alors* $\langle C_{\mu,\mathbb{Z}^p},\phi\rangle=0$.

Ceci montre que $C_{\mu,\mathbb{Z}^p}$ induit une forme linéaire sur $\mathrm{H}^p_\ell(V_\Omega,\mathbb{R})$. Nous pouvons désormais énoncer le théorème de l'indice mesuré d'A. Connes [**48**].

THÉORÈME 4.2. *Soit* ch^p_ℓ *la composante de degré p du caractère de Chern longitudinal. Alors*

$$\tau^\mu_*(\mathrm{K}_0(C(\Omega)\rtimes\mathbb{Z}^p)) = \langle \mathrm{ch}^p_\ell(K^0(V_\Omega)), [C_{\mu,\mathbb{Z}^p}]\rangle.$$

Nous allons achever cette section par la détermination du groupe de cohomologie longitudinal de V_Ω de degré maximal. Désignons par $C(\Omega,\mathbb{R})_{\mathbb{Z}^p}$ l'espace des coinvariants de l'action de $\mathbb{Z}^p$ sur $C(\Omega,\mathbb{R})$, c'est à dire le quotient de l'algèbre $C(\Omega,\mathbb{R})$ des fonctions continues sur Ω à valeurs réelles, par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $n(f)-f$, où $f\in C(\Omega,\mathbb{R})$. Pour tout $\phi\in\Omega^p_\ell(V_\Omega,\mathbb{R})$ et tout $\omega\in\Omega$, on définit

$$\Psi_{\mathbb{Z}^p}(\phi)(\omega) := \int_{]0,1[^p}\phi(\omega,x), \forall\omega\in\Omega.$$

La fonction $\Psi_{\mathbb{Z}^p}(\phi)$ est une fonction continue sur Ω à valeurs réelles.

PROPOSITION 4.3. [**10**] *L'application* $\phi\mapsto\Psi_{\mathbb{Z}^p}(\phi)$ *induit une application de* $\mathrm{H}^p_\ell(V_\Omega,\mathbb{R})$ *vers* $C(\Omega,\mathbb{R})_{\mathbb{Z}^p}$ *et cette application est un isomorphisme, c'est à dire*

$$\mathrm{H}^p_\ell(V_\Omega,\mathbb{R}) \cong C(\Omega,\mathbb{R})_{\mathbb{Z}^p}.$$

Puisque la mesure μ est $\mathbb{Z}^p-$invariante, elle induit une forme linéaire sur $C(\Omega,\mathbb{R})_{\mathbb{Z}^p}$ que nous notons $\Phi_{\mathbb{Z}^p,\mu}$. Le triangle suivant est alors commutatif [**10**] :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^p_\ell(V_\Omega,\mathbb{R}) \arrow[rr, "\Psi_{\mathbb{Z}^p}", "\cong"'] \arrow[dr, "C_{\mu,\mathbb{Z}^p}"'] & & C(\Omega,\mathbb{R})_{\mathbb{Z}^p} \arrow[dl, "\Phi_{\mathbb{Z}^p,\mu}"] \\
& \mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

5. Preuve de la conjecture

La preuve de la conjecture se fait en utilisant le résultat d'intégralité suivant :

THÉORÈME 5.1. [**10**] $\psi_{\mathbb{Z}^p}(\mathrm{ch}^p_\ell(\mathrm{K}_0(V_\Omega))$ *appartient à l'image de* $C(\Omega,\mathbb{Z})\to C(\Omega,\mathbb{R})_{\mathbb{Z}^p}$ *.*

Expliquons maintenant brièvement comment en déduire la conjecture de Bellissard. Remarquons tout d'abord que si on désigne par i le morphisme d'inclusion $C(\Omega)\hookrightarrow C(\Omega)\rtimes\mathbb{Z}^p$), alors l'image par la trace de $i_*(\mathrm{K}_0(C(\Omega))\subset\mathrm{K}_0(C(\Omega)\rtimes\mathbb{Z}^p)$ (i_* étant le morphisme induit par i en K-théorie), est précisément $\mathbb{Z}[\mu]$ et donc $\mathbb{Z}[\mu]\subset\tau^\mu_*(\mathrm{K}_0(C(\Omega)\rtimes\mathbb{Z}^p))$.

Montrons l'inclusion inverse. En utilisant le théorème 2.1, on déduit que :

$$\tau^\mu_*(\mathrm{K}_0(C(\Omega)\rtimes\mathbb{Z}^p)) = \{\tau^\mu_*(\mathrm{Ind}_{V_\Omega}\partial^e_{\Omega,\mathbb{R}^p}) - \tau^\mu_*(\mathrm{Ind}_{V_\Omega}\partial^{e'}_{\Omega,\mathbb{R}^p}), [e]-[e']\in\mathrm{K}_0(C^{\infty,0}(V_\Omega))\}.$$

Ensuite, d'après le théorème de l'indice mesuré d'A. Connes [**48**], on a :

$$\tau^\mu_*(\mathrm{K}_0(C(\Omega)\rtimes\mathbb{Z}^p)) = \langle \mathrm{ch}^p_\ell(\mathrm{K}^0(V_\Omega)), [C_{\mu,\mathbb{Z}^p}]\rangle.$$

D'après les définitions de $[C_{\mu,\mathbb{Z}^p}]$ et $\psi_{\mathbb{Z}^p}$, on a :

$$\langle x, [C_{\mu,\mathbb{Z}^p}]\rangle = \langle\psi_{\mathbb{Z}^p}(x),\mu\rangle, \quad \forall x\in\mathrm{H}^p_\ell(V_\Omega,\mathbb{R}).$$

Par conséquent $\langle \mathrm{ch}_\ell^p([e]), [C_{\mu,\mathbb{Z}^p}]\rangle = \langle \psi_{\mathbb{Z}^p}(\mathrm{ch}_\ell^p([e])), \mu\rangle$. Mais le théorème 5.1 implique alors que $\psi_{\mathbb{Z}^p}(\mathrm{ch}_\ell^p(e))$ provient d'un elément de $C(\Omega, \mathbb{Z})$. Ainsi :

$$\tau_*^\mu(\mathrm{K}_0(C(\Omega) \rtimes \mathbb{Z}^p)) \subset \mu(C(\Omega, \mathbb{Z})) = \mathbb{Z}[\mu].$$

CHAPITRE 3

Descente fonctorielle pour les actions propres de groupes

La conjecture de Baum-Connes jouit de nombreuses propriétés de stabilité (par passage à un sous-groupe fermé [**14, 50**], par extension [**13, 51**], par limite inductive de G-algèbres [**14**], etc ...). Ces propriétés de stabilité ont toutes été prouvées selon un même shéma se décomposant en deux étapes :

(1) si G est un groupe localement compact, désignons par $\mathcal{E}(G)$ un exemple universel pour les actions propres et G_0 sa composante neutre. Le groupe G/G_0 est totalement discontinu et donc on peut choisir un exemple universel pour les action propres de G/G_0 qui soit un *complexe simplicial typé* sur lequel G/G_0 agisse simplicialement en préservant le type. Le produit $\mathcal{E}(G) \times \mathcal{E}(G/G_0)$ muni de l'action diagonale de G (le groupe G agissant sur le deuxième facteur via le morphisme $G \to G/G_0$) est encore un exemple universel pour les action propres de G. En utilisant des arguments du type Mayer-Vietoris sur le facteur $\mathcal{E}(G/G_0)$ et un isomorphisme de compression sur un sous-groupe ouvert, on se ramène au cas d'un groupe presque connexe.

(2) pour un groupe presque connexe, on réduit le problème à une action linéaire d'un sous-groupe compact maximal sur un espace vectoriel de dimension fini, en utilisant l'isomorphisme de restriction de Kasparov.

Cette démarche peut être considérée comme une généralisation du principe de Mackey : soit G un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes et soit K un sous-groupe compact maximal, alors en un certain sens, G est équivalent à $T_K(G/K) \rtimes K$, où $T_K(G/K)$ est l'espace tangent à G/K en K. Nous avons formalisé cette démarche en introduisant les descentes fonctorielles. Ceci nous permet d'établir des critères d'équivalences naturelles entre divers foncteurs ayant le même type que la K-théorie topologique d'un groupe. En particulier, nous appliquons ce formalisme

– à l'injectivité de la flèche d'assemblage pour les groupes localement compacts moyennables à l'infini, généralisant ainsi un résultat de N. Higson pour les groupes discrets.
– à la formule de Künneth pour les groupes vérifiant la conjecture de Baum-Connes.
– à l'étude de la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans une C^*-algèbre munie d'une action triviale du groupe.
– à l'étude de la stabilité de la conjecture de Baum-Connes par extension (notamment nous améliorons nos résultats précédents [**13, 51**]) et en particulier de la stabilité de la conjecture à coefficients dans $\mathbb{C}$ par produit direct.

Nous donnons en corollaire immédiat de ces deux derniers points une preuve de la conjecture de Baum-Connes pour les groupes adéliques.

Dans tout ce chapitre, les espaces localement compacts sont supposés dénombrables à l'infini et les C^*-algèbres sont supposées séparables. Dans la suite, si G est un groupe localement compact, un G-espace propre désignera un espace localement compact muni d'une action propre de G et une G-algèbre une C^*-algèbre munie d'une action fortement continue de G par automorphismes.

1. Propriété de descente pour $C_0(X) \mapsto \mathrm{KK}_*^G(C_0(X), B)$

Soit G un groupe localement compact. Désignons par $\mathcal{A}(G)$ la catégorie des G-algèbres propres commutatives (i.e des algèbres $C_0(X)$, où X est un G-espace propre, les morphismes correspondant alors aux applications continues, propres et équivariantes entre G-espaces propres). Soit B une G-algèbre. Le foncteur $\mathrm{KK}_*^G(\bullet, B)$ est un foncteur contravariant et additif entre la catégorie $\mathcal{A}(G)$ et la catégorie des groupes abéliens. Ce foncteur vérifie la série de propriétés suivante.

Propriétés cohomologiques :

(1) le foncteur $\mathrm{KK}_*^G(\bullet, B)$ est invariant par homotopie ;
(2) le foncteur $\mathrm{KK}_*^G(\bullet, B)$ est semi-exact [**54**], c'est à dire que pour toute suite exacte courte G-équivariante
$$0 \longrightarrow J \longrightarrow A \longrightarrow A/J \longrightarrow 0$$
dans $\mathcal{A}(G)$, on a l'exactitude au milieu de
$$\mathrm{KK}_*^G(A/J, B) \longrightarrow \mathrm{KK}_*^G(A, B) \longrightarrow \mathrm{KK}_*^G(J, B).$$

Périodicité de Bott : soit X un espace localement compact muni d'une action propre de G. Alors l'action diagonale de G sur $X \times \mathbb{R}^2$ (l'action de G sur $\mathbb{R}^2$ étant triviale) est propre, et donc $C_0(X) \mapsto C_0(X \times \mathbb{R}^2)$ définit un foncteur $S^2 : \mathcal{A}(G) \to \mathcal{A}(G)$. On a alors un isomorphisme naturel
$$\mathrm{KK}_*^G(A, B) \cong \mathrm{KK}_*^G(S^2(A), B).$$

Propriété d'induction :

Soit H un sous-groupe fermé de G et soit X un H-espace propre, alors l'espace induit $X \times_H G$ est un G-espace propre. Cette construction induit donc un foncteur $\mathrm{Ind}_H^G : \mathcal{A}(H) \to \mathcal{A}(G)$.

THÉORÈME 1.1. [**13**] *Soit H un sous-groupe ouvert de G et soit $A \in \mathcal{A}(H)$, alors on a un isomorphisme naturel*
$$I_H^G : \mathrm{KK}_*^H(A, B) \to \mathrm{KK}_*^G(\mathrm{Ind}_H^G(A), B).$$

Propriété de restriction :

Soit X un G-espace propre. Alors tout sous-groupe fermé H de G agit par restriction proprement sur X. On obtient des morphismes de restriction
$$\mathrm{res}_H^G : \mathcal{A}(G) \to \mathcal{A}(H) \text{ et } \mathrm{R}_H^G : \mathrm{KK}_*^G(\bullet, B) \to \mathrm{KK}_*^H(\bullet, B).$$

THÉORÈME 1.2. [**38**] *Si G est presque connexe de sous-groupe compact maximal K, alors pour tout élément A de $\mathcal{A}(G)$*

$$\mathrm{R}_K^G : \mathrm{KK}_*^G(A,B) \to \mathrm{KK}_*^K(A,B)$$

est un isomorphisme.

2. Descente fonctorielle abstraite

Soit G un groupe localement compact. On fixe $\mathcal{S}(G)$ une partie de l' ensemble des sous-groupes de G telle que

– $G \in \mathcal{S}(G)$;
– $\mathcal{S}(G)$ contient tous les sous-groupes ouverts et presque connexes de G, ainsi que leurs sous-groupes compacts maximaux.

(Un exemple de tel $\mathcal{S}(G)$ est l'ensemble des sous-groupes fermés de G)

DEFINITION 2.1. Une *descente fonctorielle* pour G est une collection de foncteurs $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_H)_{H\in\mathcal{S}(G)}$, où $\mathcal{F}_H$ est un foncteur contravariant additif allant de la catégorie $\mathcal{A}(H)$ vers la catégorie **Ab** des groupes abéliens vérifiant la série de propriétés suivante :

Axiomes cohomologiques :

(1) pour tout H dans $\mathcal{S}(G)$, le foncteur $\mathcal{F}_H$ est invariant par homotopie ;
(2) pour tout H dans $\mathcal{S}(G)$, le foncteur $\mathcal{F}_H$ est semi-exact, c'est à dire que pour toute suite exacte courte H-équivariante

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow A \longrightarrow A/J \longrightarrow 0$$

dans $\mathcal{A}(H)$, on à l'exactitude au milieu de

$$\mathcal{F}_H(A/J) \longrightarrow \mathcal{F}_H(A) \longrightarrow \mathcal{F}_H(J).$$

Axiome d'induction : pour tout sous-groupe ouvert et presque connexe H de G, il existe une équivalence naturelle I_H^G entre $\mathcal{F}_H$ et $\mathcal{F}_G \circ \mathrm{Ind}_H^G$;

Axiome de restriction : pour tout sous-groupe compact maximal K d'un sous-groupe ouvert H de G presque connexe, il existe une équivalence naturelle R_K^H entre $\mathcal{F}_H$ et $\mathcal{F}_K \circ \mathrm{res}_K^H$;

Periodicité de Bott : il existe une équivalence naturelle entre $\mathcal{F}_H$ et $\mathcal{F}_H \circ S^2$.

EXEMPLE 2.2. D'après la section 1 , si G est un groupe localement compact, alors pour toute G-algèbre B, la collection de foncteurs $\big(\mathrm{KK}_*^H(\bullet, B)\big)_{H\in\mathcal{S}(G)}$ est une descente fonctorielle pour G.

REMARQUE 2.3. Soit $(\mathcal{F}(H))_{H\in\mathcal{S}(G)}$ une descente fonctorielle, On peut définir les descentes fonctorielles d'ordre supérieur par $\mathcal{F}_H^n(A) := \mathcal{F}_H(A \otimes C_0(\mathbb{R}^n))$ pour tout $A \in \mathcal{A}(H)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a une équivalence naturelle entre $\mathcal{F}_H^n$ et $\mathcal{F}_H^{n+2}$ et par un argument standard d'algèbre homologique, à toute suite exacte courte H-équivariante

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow A \longrightarrow A/J \longrightarrow 0$$

dans $\mathcal{A}(H)$, on peut associer une application de bord

$$\partial_n : \mathcal{F}_H^n(J) \longrightarrow \mathcal{F}_H^{n+1}(A/J)$$

telle que l'on ait la suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{F}_H^n(A/J) \longrightarrow \mathcal{F}_H^n(A) \longrightarrow \mathcal{F}_H^n(J) \xrightarrow{\partial_n} \mathcal{F}_H^{n+1}(A/J) \longrightarrow \cdots$$

DEFINITION 2.4. Soit $\mathcal{F}$ une descente fonctorielle pour G, on définit l'objet géométrique associé à $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}(G) := \lim_{Z \subseteq \mathcal{E}(G)} \mathcal{F}_G(C_0(Z)),$$

où la limite inductive est prise sur les parties $G-$compactes Z de $\mathcal{E}(G)$. Comme $\mathcal{F}_G$ est invariant par homotopie, $\mathcal{F}(G)$ ne dépend pas de la réalisation choisie de $\mathcal{E}(G)$.

DEFINITION 2.5. Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux descentes fonctorielles pour G. Une transformation de descente est une collection $\Lambda = (\Lambda_H)_{H \in \mathcal{S}(G)}$ de transformations naturelles entre $\mathcal{F}_H$ et $\mathcal{G}_H$ compatible avec l'induction, la restriction et la périodicité de Bott.

Si Λ est une descente fonctorielle entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, alors Λ induit sur les limites inductives un morphisme $\Lambda(G) : \mathcal{F}(G) \longrightarrow \mathcal{G}(G)$. Nous pouvons énoncer le critère de comparaison suivant pour des descentes fonctorielles.

THÉORÈME 2.6. [**18**] *Soit*
– $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{G}$ *deux descentes fonctorielles ;*
– Λ *une transformation de descente entre* $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{G}$ *;*
tels que pour tout groupe compact $K \in \mathcal{S}(G)$ *agissant linéairement sur un espace vectoriel réel* V *de dimension finie,*

$$\Lambda_K : \mathcal{F}_K(C_0(V)) \longrightarrow \mathcal{G}_K(C_0(V))$$

soit un isomorphisme. Alors, l'application

$$\Lambda(G) : \mathcal{F}(G) \longrightarrow \mathcal{G}(G)$$

est un isomorphisme.

3. Exemples immédiats

3.1. Application aux construction Dirac/Dual Dirac. L'exemple suivant est fondamental dans la construction des éléments Dirac/Dual Dirac abstraits [**46**].

EXEMPLE 3.1. Pour tout $x \in \mathrm{KK}^G(B, D)$ tel que la restriction $\mathrm{R}_K^G(x)$ soit une KK^K-équivalence pour tout sous-groupe compact K de G, on associe la transformation de descente

$$\left(\mathrm{KK}^H(\bullet, B) \xrightarrow{\otimes \mathrm{R}_H^G(x)} \mathrm{KK}^H(\bullet, D)\right)_{H \in \mathcal{S}(G)}.$$

Cette transformation de descente vérifie les hypothèses du théorème 2.6. Il en résulte que

$$\mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G, B) \xrightarrow{\otimes x} \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G, D)$$

est un isomorphisme.

En conséquence, on peut étendre la technique dite de l'élément γ au cas où le Dirac et le Dual-Dirac sont à coefficients dans une $X \rtimes G$-algèbre et G est un groupe agissant moyennablement sur l'espace localement compact X [**1**].

Théorème 3.2. [**18**] *Soit G un groupe localement compact agissant moyennablement sur un espace X localement compact. Soit D une $X \rtimes G$-algebre et soit $\gamma = \alpha \otimes_D \beta \in \mathrm{KK}_0^G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ avec $\alpha \in \mathrm{KK}_0^G(\mathbb{C}, D)$ et $\beta \in \mathrm{KK}_0^G(D, \mathbb{C})$, tels que la restriction de γ à $\mathrm{KK}_0^K(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ soit l'idendité pour tout groupe compact $K \in \mathcal{S}(G)$. Alors, pour toute G-algèbre A, l'application d'assemblage de Baum-Connes*

$$\mu_A : \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G; A) \to \mathrm{K}_*(A \rtimes_r G)$$

est injective et scindée.

Démonstration. Ceci résulte du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G; A) \arrow[r, "\otimes_{\mathbb{C}}\alpha"] \arrow[d, "\mu_A"'] & \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G; A \otimes D) \arrow[r, "\otimes_D \beta"] \arrow[d, "\mu_{A\otimes D}"'] & \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G; A) \arrow[d, "\mu_A"] \\
\mathrm{K}_*(A \rtimes_r G) \arrow[r, "\otimes J_G(\sigma_A(\alpha))"'] & \mathrm{K}_*((A \otimes D) \rtimes_r G) \arrow[r, "\otimes J_G(\sigma_A(\beta))"'] & \mathrm{K}_*(A \rtimes_r G)
\end{tikzcd}.$$

En effet la composition des deux flèches horizontales supérieures est un isomorphisme d'après l'exemple 3.1 et la flèche verticale du milieu est un isomorphisme (*cf* corollaire 6.6). □

3.2. Injectivité de la flèche d'assemblage pour les groupes moyennables à l'infini. Un groupe localement compact G est dit moyennable à l'infini si G agit moyennablement sur un espace compact [**1**]. La remarque suivante permet d'étendre la preuve de [**29**] de l'injectivité de l'application d'assemblage pour les groupes moyennables à l'infini.

Remarque 3.3. Soit Z un espace compact, muni d'une action de G tel que pour tout sous-groupe compact K de G, l'espace Z est K-contractile (ce qui est le cas si par exemple Z est convexe et l'action de G est affine). Alors pour toute G-algèbre B, la famille de transformations

$$\Big(\mathrm{KK}^H(\bullet, B) \longrightarrow \mathrm{KK}^H(\bullet, B \otimes C(Z)) \Big)_{H \in \mathcal{S}(G)}$$

induit par l'inclusion $\mathbb{C} \hookrightarrow C(Z)$, définit une transformation de descente vérifiant les hypothèses du théorème 2.6. Il en résulte donc un isomorphisme

$$\mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G, B) \cong \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G, B \otimes C(Z)).$$

En conséquence, nous obtenons

Théorème 3.4. [**29**] *Soit G un groupe localement compact et moyennable à l'infini et soit B une G-algèbre. Alors l'application d'assemblage de Baum-Connes*

$$\mu_B : \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G; B) \to \mathrm{K}_*(B \rtimes_r G)$$

est injective et scindée.

Démonstration. Soit Z un espace compact sur lequel G agit moyennablement. Quitte à remplacer Z par son espace de mesures de probabilité, on peut supposer que Z est convexe et que l'action de G est affine ; on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G;B) & \xrightarrow{\mu_B} & \mathrm{K}_*(B \rtimes_r G) \\ {\scriptstyle i_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_*} \\ \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G;B\otimes C(Z)) & \xrightarrow[\mu_{B\otimes C(Z)}]{} & \mathrm{K}_*((B\otimes C(Z)) \rtimes_r G), \end{array}$$

où les flèches verticales sont induites par $i : \mathbb{C} \hookrightarrow C(Z)$.

– l'action de G sur Z étant moyennable, la flèche horizontale inférieure est un isomorphisme [**55**] ;
– d'après l'exemple 3.3, la flèche verticale de gauche est un isomorphisme et donc la flèche horizontale supérieure est un isomorphisme.

□

4. Stabilité de la conjecture de Baum-Connes par extension

Dans cette section, nous utilisons les techniques de descente fonctorielle pour améliorer les résultats de stabilité par extension de la conjecture de Baum-Connes obtenus dans [**13, 14, 51**] :

THÉORÈME 4.1. *Soit G un groupe localement compact, N un sous-groupe normal fermé de G et B une G-algèbre. Supposons que la condition suivante (A) soit vérifiée :*

(A) Pour tout sous-groupe fermé L de G contenant N tel que L/N soit compact, L vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans B.

Alors G vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans B si et seulement si G/N vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans $C_0(G/N,B) \rtimes_r G$ où

– *G agit par translations à gauche sur G/N et diagonalement sur $C_0(G/N,B) \cong C_0(G/N) \otimes B$*
– *l'action de G/N sur $C_0(G/N,B)$ est l'action diagonale de G/N sur $C_0(G/N) \otimes B$ triviale sur B et par translations à droite sur $C_0(G/N)$;*
– *l'action de G/N sur $C_0(G/N,B) \rtimes_r G$ est induite par l'action de $G/N \times G$ sur $C_0(G/N,B)$.*

REMARQUE 4.2.

(1) $C_0(G/N,B) \rtimes_r G$ est Morita équivalente à $B \rtimes_r N$ [**27**] ;

(2) Si G est un produit semi-direct de N par G/N, on a par restriction une action de G/N sur $B \rtimes_r N$ et cette action est Morita équivalente à l'action de G/N sur $C_0(G/N,B) \rtimes_r G$. La validité de la conjecture de Baum-Connes étant invariante par équivalence de Morita des algèbres coefficients (voir [**13**, Proposition 5.6]), les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) G/N vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans $C_0(G/N,B) \rtimes_r G$.

(ii) G/N vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans $B \rtimes_r N$.

Le théorème 4.1 généralise le résultat de [**51**] dans le cas des groupes discrets et le résultat de [**13**] dans le cas des groupes localement compact avec certaines hypothèses concernant l'existence d'éléments γ. La preuve du théorème se fait suivant le principe de la preuve de [**51**] pour les groupes discrets en se ramenant au cas des produits directs de groupes.

Rappelons tout d'abord que lorsque $G \times G'$ est le produit direct de deux groupes localement compacts agissant sur une C^*-algèbre A, J. Chabert a construit [**12**, 3.9] une application d'assemblage partiel (voir aussi [**51**, 4])

$$\mu_{part,G'} : \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G \times G'; A) \to \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G'; A \rtimes_r G).$$

En prenant $G' = G/N$ et $A = C_0(G/N, B)$ où N et B sont comme dans le théorème 4.1, on obtient

Proposition 4.3. *Supposons que la flèche d'assemblage*

$$\mu_{part,G/N} : \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G \times G/N; C_0(G/N, B)) \to \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G/N; C_0(G/N, B) \rtimes_r G)$$

soit un isomorphisme. Alors G vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans B si et seulement si G/N vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans $C_0(G/N, B) \rtimes_r G$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que la $G \times G/N$-algèbre $C_0(G/N, B)$ est isomorphe à l'algèbre induite à $G \times G/N$ de la G-algèbre B, où G est vu comme un sous-groupe de $G \times G/N$ par l'inclusion diagonale $G \ni s \mapsto (s, sN) \in G \times G/N$. Le théorème est une conséquence du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G; B) \arrow[r, "\mathrm{Ind}_G^{G \times G/N}", "\cong"'] \arrow[d, "\mu_B"'] & \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G \times G/N; C_0(G/N, B)) \arrow[r, "\mu_{part,G/N}", "\cong"'] \arrow[d, "\mu_{C_0(G/N,B)}"'] & \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G/N; C_0(G/N, B) \rtimes_r G) \arrow[d, "\mu_{C_0(G/N,B) \rtimes_r G}"] \\
\mathrm{K}_*(B \rtimes_r G) \arrow[r, "\cong"'] & \mathrm{K}_*\left(C_0(G/N, B) \rtimes_r (G \times G/N)\right) \arrow[r, "\cong"'] & \mathrm{K}_*\left((C_0(G/N, B) \rtimes_r G) \rtimes_r G/N\right),
\end{tikzcd}$$

où

- le premier isomorphisme de la première ligne est l'isomorphisme d'induction de [**14**, Theorem 2.2] ;
- la seconde flèche de la première ligne est un isomorphisme par hypothèse ;
- le premier isomorphisme de la seconde ligne est l'isomorphisme d'imprimitivité de Green [**27**] ;
- le second isomorphisme de la seconde ligne correspond à l'idendification des produits croisés réduits successifs.

Le premier carré commute d'après [**14**, Proposition 2.3] et le second par [**12**, Proposition 3.10]. □

En conséquence, pour prouver le théorème 4.1, il suffit de montrer que la condition (A) implique la bijectivité de l'application d'assemblage partiel de la proposition 4.3.

Rappelons la construction du morphisme

$$\mu_{part,G'} : \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G \times G'; A) \to \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G'; A \rtimes_r G).$$

Soit respectivement $\mathcal{E}(G)$ et $\mathcal{E}(G')$ les exemples universels pour les actions propres de G et G'. Alors $\mathcal{E}(G) \times \mathcal{E}(G')$ est un exemple universel pour les actions propres de $G \times G'$ et

$$\mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G \times G'; A) = \lim_{X,Y} \mathrm{KK}_*^{G \times G'}(C_0(X \times Y), A),$$

où la limite inductive est prise sur les parties G-compactes X de $\mathcal{E}(G)$ et sur les parties G'-compactes Y de $\mathcal{E}(G')$. Soit X une partie G-compacte de $\mathcal{E}(G)$. Pour tout G'-espace propre

Y, on définit le morphisme

$$\mu_{X,Y} : \mathrm{KK}_*^{G\times G'}(C_0(X\times Y), A) \to \mathrm{KK}^{G'}(C_0(Y), A \rtimes_r G),$$

comme étant la composée

$$\mathrm{KK}_*^{G\times G'}(C_0(X\times Y), A) \overset{J_G}{\to} \mathrm{KK}^{G'}(C_0(X)\rtimes G \otimes C_0(Y), A\rtimes_r G) \overset{[p_X]\otimes\cdot}{\to} \mathrm{KK}^{G'}(C_0(Y), A\rtimes_r G),$$

où

- J_G est l'application de descente de Kasparov G'-équivariante ;
- $[p_X] \in \mathrm{K}_*(C_0(X)\rtimes G)$ et la classe canoniquement associée à l'action propre de G sur X.

L'application d'assemblage partiel $\mu_{part,G'}$ est alors obtenue en prenant la limite inductive sur parties G-compactes X de $\mathcal{E}(G)$ et sur les parties G'-compactes Y de $\mathcal{E}(G')$.

Pour tout $H \in \mathcal{S}(G')$ et pour tout $C_0(Y) \in \mathcal{A}(H)$, on définit

$$\mathcal{F}_H^*(C_0(Y)) := \lim_X \mathrm{KK}_*^{G\times H}(C_0(X\times Y), A) \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_H^*(C_0(Y)) := \mathrm{KK}_*^H(C_0(Y), A\rtimes_r G),$$

où dans la définition de $\mathcal{F}^*$, la limite inductive est prise sur parties G-compactes X de $\mathcal{E}(G)$. Alors $\mathcal{F}^* = (\mathcal{F}_L^*)_{L\in\mathcal{S}(G')}$ et $\mathcal{G}^* = (\mathcal{G}_L^*)_{L\in\mathcal{S}(G')}$ sont des foncteurs vérifiant les axiomes cohomologiques et d'inductions ainsi que la périodicité de Bott de la définition 2.1. Le foncteur $\mathcal{G}^*$ vérifie l'axiome de restriction. L'axiome de restriction pour $\mathcal{F}^*$ provient de la généralisation suivante de [**38**] (celle-ci se montre aussi en utilisant la technique de descente fonctorielle) :

Lemme 4.4. [**18**, lemme 2.4] *Soit G et H deux groupes localement compacts avec H presque connexe et soit A une $G\times H$-algèbre. Soit K un sous-groupe compact maximal de H. Pour tout H-espace propre Y, le morphisme de restriction $\mathrm{R}_{G\times K}^{G\times H}$ induit par passage à la limite inductive sur les parties G-compactes X de $\mathcal{E}(G)$, un isomorphisme*

$$\lim_X \mathrm{KK}_*^{G\times H}(C_0(X\times Y), A) \longrightarrow \lim_X \mathrm{KK}_*^{G\times K}(C_0(X\times Y), A).$$

Le morphisme $\mu_{X,Y} : \mathrm{KK}_*^{G\times G'}(C_0(X\times Y), A) \longrightarrow \mathrm{KK}^{G'}(C_0(Y), A\rtimes_r G)$ induit par passage à la limite inductive sur les parties G-compactes X de $\mathcal{E}(G)$ une transformation de descente entre $\mathcal{F}^*$ et $\mathcal{G}^*$ [**51**]). On a donc d'après le théorème 2.6 :

Proposition 4.5. *Soit $G\times G'$ un produit direct de groupes localement compacts et A une $G\times G'$-algèbre. Supposons que pour tout sous-groupe compact K de G' et toute action K-linéaire sur un espace vectoriel réel V de dimension finie, le groupe $G\times K$ vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans $A\otimes C_0(V)$ (l'action de G sur V étant triviale). Alors, l'application d'assemblage partiel $\mu_{part,G'} : \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G\times G'; A) \to \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G'; A\rtimes_r G)$ est un isomorphisme.*

On peut simplifier les hypothèses de cette proposition en utilisant le résultat de structure suivant pour les actions linéaires de groupes compacts [**47**] : soit V comme dans les hypothèse de la proposition. Alors il existe une stratification

$$\emptyset = U_0 \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots \subseteq U_l = V$$

d'ouverts K-invariant U_i de V tel que tous les éléments de $U_i \smallsetminus U_{i-1}$ aient le même type d'orbite.

En conséquence, on obtient [**18**, corollary 2.9]

COROLLAIRE 4.6. *Soit A une $G \times G'$-algèbre telle que pour tout sous-groupe compact K de G', le groupe $G \times K$ vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans A. Alors l'application d'assemblage partiel $\mu_{part,G'} : \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G \times G'; A) \to \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G'; A \rtimes_r G)$ est un isomorphisme.*

Nous sommes désormais en mesure de conclure la preuve du théorème 4.1. D'après la proposition 4.3 et le corollaire 4.6, il suffit de montrer que la condition (A) du théorème implique que $G \times \dot{L}$ vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans $C_0(G/N, B)$ pour tout sous-groupe compact $\dot{L}$ de G/N. Soit $L \subseteq G$ l'image réciproque de $\dot{L}$ dans G. En tant que $G \times \dot{L}$-algèbre, $C_0(G/N, B)$ est l'algèbre induite à $G \times L$ de la L-algèbre B, où L est vu comme un sous-groupe de $G \times \dot{L}$ par l'inclusion diagonale $L \ni s \mapsto (s, sN) \in G \times \dot{L}$. D'après la condition (A), le groupe L vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans B, et donc d'après [**14**, Theorem 2.5], le groupe $G \times \dot{L}$ vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans l'algèbre induite à $G \times \dot{L}$ de B (relativement à l'inclusion $L \hookrightarrow G \times \dot{L}$) et donc à coefficients dans $C_0(G/N, B)$.

Dans le cas des produits directs, on peut encore affiner le résultat :

COROLLAIRE 4.7. *Soit G et G' deux groupes localement compacts tels que G vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans $\mathbb{C}$. Alors l'application d'assemblage partiel*

$$\mu_{part,G'} : \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G \times G'; \mathbb{C}) \to \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G', C_r^*(G))$$

est un isomorphisme. En conséquence, le produit direct $G \times G'$ vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans $\mathbb{C}$ si et seulement si G' vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans $C_r^*(G)$.

5. La formule de Künneth en K-théorie

5.1. La classe $\mathcal{N}$. Soit A et B deux C^*-algèbres. On désigne par $A \otimes B$ leur produit tensoriel minimal.

DEFINITION 5.1. Soit A une C^*-algèbre. On dit que A appartient à la classe $\mathcal{N}$ si pour toute C^*-algèbre B tel que $\mathrm{K}_*(B)$ soit une groupe abélien libre, le produit en K-théorie

$$\alpha : \mathrm{K}_*(A) \otimes \mathrm{K}_*(B) \longrightarrow \mathrm{K}_*(A \otimes_{\min} B)$$

est un isomorphisme.

REMARQUE 5.2. La classe $\mathcal{N}$ contient la *bootstrap class* [**11**, 22.3.4]. En particulier les C^*-algèbres de type I appartiennent à la classe $\mathcal{N}$.

Pour toute algèbre A appartenant à la classe $\mathcal{N}$, C. Schochet [**53**] a établi la *formule de Künneth en K-théorie* : pour toute C^*-algèbre B, il existe une suite exacte canonique :

$$0 \to \mathrm{K}_*(A) \otimes \mathrm{K}_*(B) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{K}_*(A \otimes B) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Tor}(\mathrm{K}_*(A), \mathrm{K}_*(B)) \to 0, \tag{1}$$

REMARQUE 5.3.

(1) C. Schochet a initialement établi cette formule pour les C^*-algèbres nucléaires de la classe $\mathcal{N}$. Ce résultat peut en fait être étendue à toute la classe $\mathcal{N}$ [**18**, Section 4].

(2) Cette formule se démontre grâce à l'existence d'une résolution géométrique pour B [**53**]. La formule est bien évidemment symétrique en A et B donc est aussi valable si A est une C^*-algèbres séparable et B est une algèbre appartenant à $\mathcal{N}$. Dans ce cas la formule de Künneth peut en fait être établie aussi à partir d'une résolution géométrique pour B.

La classe $\mathcal{N}$ vérifie les propriétés de stabilité suivantes [**18**, Lemma 4. 4] :

Lemme 5.4.

(1) *Soit $A \in \mathcal{N}$ et B une C^*-algèbre* KK*-dominée par A (cf* [**11**, 23.10.6]*), alors $B \in \mathcal{N}$; notamment, $\mathcal{N}$ est stable par* KK*-équivalence et en particulier est stable par équivalence de Morita.*

(2) *Si $0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$ est une suite exacte de C^*-algèbres admettant un relèvement complètement positif, dont deux des C^*-algèbres appartiennent à $\mathcal{N}$, alors la troisième appartient aussi à $\mathcal{N}$.*

(3) *Soit A et B deux C^*-algèbres de $\mathcal{N}$, alors $A \otimes B \in \mathcal{N}$.*

(4) *Soit $A = \lim A_i$, une limite inductive de C^*-algèbres de $\mathcal{N}$ dont les morphismes de structure sont injectifs, alors $A \in \mathcal{N}$.*

5.2. La classe $\mathcal{N}_G$. Nous allons maintenant établir une formule de Künneth pour la K-théorie topologique d'un groupe localement compact muni de coefficients appropriés. Soit A une G-algèbre et soit B une C^*-algèbre. En munissant B de l'action triviale de G, on obtient un morphisme naturel $\mathrm{K}_*(B) \to \mathrm{KK}_*^G(\mathbb{C}, B)$ et donc en composant avec le produit de Kasparov, on obtient pour tout G-espace propre X, un morphisme naturel

$$\alpha_X : \mathrm{KK}_*^G(C_0(X), A) \otimes \mathrm{K}_*(B) \longrightarrow \mathrm{KK}_*^G(C_0(X), A \otimes B),$$

En prenant la limite inductive sur les parties G-compactes de $\mathcal{E}(G)$, on définit un morphisme

$$\alpha_G : \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G; A) \otimes \mathrm{K}_*(B) \to \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G; A \otimes B).$$

Definition 5.5. Soit A une G-algèbre. On dit que A appartient à la classe $\mathcal{N}_G$ si et seulement si pour toute C^*-algèbre B telle que $\mathrm{K}_*(B)$ soit un groupe abélien libre, α_G est un isomorphisme.

En utilisant la même résolution géométrique pour B que dans le cas de la formule de Künneth usuelle, on obtient la formule du même type :

Proposition 5.6. *Soit A appartenant à $\mathcal{N}_G$, alors pour toute C^*-algèbre B, il existe un morphisme canonique $\beta_G : \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G; A \otimes B) \to \mathrm{Tor}\left(K_*^{\mathrm{top}}(G; A), \mathrm{K}_*(B)\right)$ tel que l'on ait la suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G; A) \otimes \mathrm{K}_*(B) \xrightarrow{\alpha_G} \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G; A \otimes B) \xrightarrow{\beta_G} \mathrm{Tor}\left(K_*^{\mathrm{top}}(G; A), \mathrm{K}_*(B)\right) \longrightarrow 0.$$

A priori, nous ne savons pas encore si la classe $\mathcal{N}_G$ est non-vide. Le résultat suivant montre qu'en fait elle contient une large classe de G-algèbres.

Théorème 5.7. *Soit A une G-algèbre telle que $A \rtimes K \in \mathcal{N}$ pour tout sous-groupe compact K de G. Alors A appartient à la classe $\mathcal{N}_G$. En particulier, la classe $\mathcal{N}_G$ contient les G-algèbres de type I.*

La preuve de ce théorème s'effectue en utilisant les techniques de descente fonctorielle. Fixons B une C^*-algèbre telle que $\mathrm{K}_*(B)$ soit un groupe abélien libre. Avec les notations de la section 2, on définit pour tout $H \in \mathcal{S}(G)$, les foncteurs $\mathcal{F}_H : \mathcal{A}(H) \to \mathbf{Ab}$ et $\mathcal{G}_H : \mathcal{A}(H) \to \mathbf{Ab}$ par

$$\mathcal{F}_H(C_0(X)) := \mathrm{KK}_*^H(C_0(X), A) \otimes \mathrm{K}_*(B) \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_H(C_0(X)) := \mathrm{KK}_*^H(C_0(X), A \otimes B),$$

où X est H-espace propre. Les morphismes α_X de 5.2 sont des transformations de descente entre $\mathcal{F}_H$ et $\mathcal{G}_H$. D'après le théorème 2.6, il suffit alors de montrer que

$$\alpha_V : \mathrm{KK}_*^K(C_0(V), A) \otimes \mathrm{K}_*(B) \to \mathrm{KK}_*^K(C_0(V), A \otimes B)$$

est un isomorphisme pour toute action K-linéaire d'un groupe compact $K \in \mathcal{S}(G)$ sur un espace vectoriel réel V de dimension finie. Ceci est une conséquence des hypothèses du théorème en utilisant encore une fois le résultat de structure pour les actions linéaires de groupe compacts employé pour la preuve du corollaire 4.6.

5.3. Application à la conjecture de Baum-Connes. L'application d'assemblage est compatible avec les produits de Kasparov à droite. On en déduit donc la compatibilité de α et α_G avec l'application d'assemblage de Baum-Connes :

PROPOSITION 5.8. *Soit A une G-algèbre et soit B une C^*-algèbre. Alors le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G; A) \otimes \mathrm{K}_*(B) & \xrightarrow{\mu_A \otimes \mathrm{id}} & \mathrm{K}_*(A \rtimes_r G) \otimes \mathrm{K}_*(B) \\ {\scriptstyle\alpha_G}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G; A \otimes B) & \xrightarrow{\mu_{A\otimes B}} & \mathrm{K}_*\big((A \otimes B) \rtimes_r G\big) \end{array}.$$

En particulier, si G vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans $A \otimes B$, pour toute C^*-algèbre B munie de l'action triviale de G, alors $A \in \mathcal{N}_G$ si et seulement si $A \rtimes_r G \in \mathcal{N}$.

Les constructions de β et de β_G se faisant de manière fonctorielle à partir de la même résolution géométrique pour B, on obtient dans chacun des deux cas de figures
– $A \in \mathcal{N}_G$ et $A \rtimes_r G \in \mathcal{N}$;
– $A \in \mathcal{N}_G$, $B \in \mathcal{N}$;
la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G; A) \otimes \mathrm{K}_*(B) & \xrightarrow{\alpha_G} & \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G; A \otimes B) & \xrightarrow{\beta_G} & \mathrm{Tor}\big(\mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G; A) \otimes \mathrm{K}_*(B)\big) & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle\mu_A \otimes \mathrm{id}}\downarrow & & {\scriptstyle\mu_{A\otimes B}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{Tor}(\mu_A, \mathrm{id})} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{K}_*(A \rtimes_r G) \otimes \mathrm{K}_*(B) & \xrightarrow[\alpha]{} & \mathrm{K}_*\big((A \rtimes_r G) \otimes B\big) & \xrightarrow[\beta]{} & \mathrm{Tor}\big(\mathrm{K}_*(A \rtimes_r G), \mathrm{K}_*(B)\big) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

dont les lignes sont exactes. On en déduit donc la proposition suivante :

PROPOSITION 5.9. *Soit A une G-algèbre telle que G vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans A. Alors les assertions suivantes sont vraies :*

(1) *Si A appartient à $\mathcal{N}_G$ et $A \rtimes_r G$ appartient à $\mathcal{N}$, alors G vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans $A \otimes B$ pour toute C^*-algèbres B munie de l'action triviale de G.*

(2) *Si A appartient à $\mathcal{N}_G$, alors pour toute algèbre B dans la classe $\mathcal{N}$ et munie de l'action triviale de G, le groupe G vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans $A \otimes B$.*

En particulier, d'après le théorème 5.7, le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ appartient à la classe $\mathcal{N}_G$. On déduit donc de la proposition 5.9 le corollaire suivant :

Corollaire 5.10. *Supposons que G vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans $\mathbb{C}$. Alors les assertions suivantes sont vraies :*

(1) *Si $C^*_r(G)$ appartient à la classe $\mathcal{N}$, alors le groupe G vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans B pour toute C^*-algèbre séparable B munie de l'action triviale de G.*

(2) *Pour tout $B \in \mathcal{N}$, le groupe G vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans B munie de l'action triviale de G.*

Cet exemple s'applique en particulier au cas des groupes presque connexes et au cas des groupes algébriques linéaires sur un corps local de caractéristique nulle. Ces groupes vérifient la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans $\mathbb{C}$ [**16**]. Si G est un groupe algébrique linéaire sur un corps local de caractéristique nulle, alors $C^*_r(G)$ [**26**, Theorem 5.4] [**23**] est de type I et donc appartient à la classe $\mathcal{N}$. Dans le cas des groupes presque connexes, on a le résultat suivant :

Proposition 5.11. [**18**, Proposition 5.1] *Soit G un groupe presque connexe. Alors les algèbres $C^*(G)$ et $C^*_r(G)$ sont dans la classe $\mathcal{N}$.*

Nous obtenons donc en conséquence de cette proposition et du corollaire 5.10 :

Corollaire 5.12. *Si G est un groupe presque connexe ou un groupe algébrique linéaire sur un corps local de caractéristique nulle, alors G vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans B pour toute C^*-algèbre B munie de l'action triviale de G.*

Nous allons finir cette section par une application à la stabilité de la conjecture de Baum-Connes à coefficient dans $\mathbb{C}$. En combinant le corollaire 5.10, le résultat de stabilité de la conjecture de Baum-Connes par produit direct du corollaire 4.7 et la stabilité de la classe $\mathcal{N}$ par produit tensoriel du lemme 5.4, on obtient

Théorème 5.13. *Soit G_1 et G_2 deux groupes localement compacts.*

(1) *Si G_1 et G_2 vérifient la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans $\mathbb{C}$ et si $C^*_r(G_1)$ ou $C^*_r(G_2)$ appartient à la classe $\mathcal{N}$, alors le produit direct $G_1 \times G_2$ vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans $\mathbb{C}$.*

(2) *Soit G_1,$G_2, \ldots, G_n$ des groupes localement compacts tels que pour tout $k = 1, \ldots, n$,*
   - *le groupe G_k vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans $\mathbb{C}$;*
   - *l'algèbre $C^*_r(G_k)$ appartienne à $\mathcal{N}$.*

   Alors le produit direct $G := G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans B pour toute C^*-algèbre B munie de l'action triviale de G.

5.4. La conjecture de Baum-Connes pour les groupes adéliques. Soit G un groupe algébrique linéaire sur une extension finie k de $\mathbb{Q}$. Soit $\nu_0, \cdots, \nu_i, \cdots$ l'ensemble des places finies de k. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on désigne par

– k_{ν_i} la complétion de k par rapport a ν_i ;
– $G(k_{\nu_i})$ le groupe des points k_{ν_i}-rationnels de G ;
– $\mathcal{O}_{\nu_i}$ l'ensemble des entiers de k_{ν_i}.

Désignons par G_∞ le produit direct fini des évaluations de G par rapport aux places infinis. On rapelle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $G(k_{\nu_i}) \cap \mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_{\nu_i})$ est un sous-groupe compact de $G(k_{\nu_i})$ et on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ le groupe compact $K_n = \prod_{i>n} G(k_{\nu_i}) \cap \mathrm{GL}_m(\mathcal{O}_{\nu_i})$. Le groupe adélique $G(\mathbb{A})$ associé à G est alors définie comme la limite inductive des groupe G_n où,

$$G_n = G(k_\infty) \times G(k_{\nu_1}) \times G(k_{\nu_2}) \times \cdots \times G(k_{\nu_n}) \times K_n.$$

THÉORÈME 5.14. *Soit G un groupe algébrique linéaire sur une extension finie k de $\mathbb{Q}$. Alors le groupe adélique $G(\mathbb{A})$ associé à G vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficent dans toute C^*-algèbre B munie de l' action triviale de G.*

DÉMONSTRATION. D'après [**4**, Theorem 2], la conjecture de Baum-Connes est stable par réunion croissante de sous-groupes ouverts, donc il suffit de montrer le résultat pour G_n. Ceci résulte du théorème 5.13 et du $(iii - iv)$ du lemme 5.4. $\square$

REMARQUE 5.15. Ce résultat à été obtenu pour les groupes réductifs sur des corps locaux arbitraires par P. Baum, S. Millington and R. Plymen dans [**4**].

6. Un lemme de Shapiro pour la K-théorie topologique d'un groupe

Soit G est un groupe localement compact agissant sur un un espace localement compact X, considérons alors le groupoïde produit croisé $X \rtimes G$. Une formulation de la conjecture de Baum-Connes pour les groupoïdes a été donnée par J.L Tu dans [**55**]. Comme dans le cas des groupes, elle prédit pour un groupoïde $\mathcal{G}$ le calcul de la K-théorie du produit croisé $A \rtimes_r \mathcal{G}$ d'une $\mathcal{G}$-algèbre A par le groupoïde $\mathcal{G}$ au moyen d'une application d'assemblage ayant pour source le groupe $\mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(\mathcal{G}, A)$ de K-théorie topologique du groupoïde $\mathcal{G}$ à coefficients dans A. Dans le cas du groupoïde $X \rtimes G$, une $X \rtimes G$-algèbre est la donnée d'une G-algèbre A et d'un morphisme G-équivariant $C_0(X) \longrightarrow \mathrm{ZM}(A)$, où $\mathrm{ZM}(A)$ est le centre de l'algèbre des multiplicateurs de A. La K-théorie topologique du groupoïde $X \rtimes G$ à coefficients dans la $X \rtimes G$-algèbre A est définie par

$$\mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(X \rtimes G; A) = \lim_{Y \subseteq \mathcal{E}(G) \times X} \mathcal{R}\mathrm{KK}_*^G(X; C_0(Y), A),$$

où la limite inductive est prise sur les parties G-compactes Y de $\mathcal{E}(G) \times X$. Rappelons que pour toute paire de $X \rtimes G$-algèbres (B, A), les cycles pour $\mathcal{R}\mathrm{KK}^G(X; B, A)$ sont donnés par des triplets équivariants de Kasparov $(\mathcal{E}, \Phi, T)$, comme dans la construction de $\mathrm{KK}^G(B, A)$, mais vérifiant la condition supplémentaire

$$(f \cdot b) \cdot (e \cdot a) = (b \cdot e) \cdot (a \cdot f) \quad \text{pour tout } f \in C_0(X), a \in A, e \in \mathcal{E} \text{ et tout } b \in B.$$

Les produits croisés réduits $A \rtimes_r G$ et $A \rtimes_r (X \rtimes G)$ coincidents, la conjecture de Baum-Connes prédit donc que les deux groupes $\mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(X \rtimes G; A)$ et $\mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G; A)$ doivent être isomorphes. Le résultat principal de cette section est le suivant :

Théorème 6.1. *Soit A une $X \rtimes G$-algèbre. Alors il existe une application naturelle d'oubli*

$$\mathcal{F} : \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(X \rtimes G; A) \to \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G; A),$$

qui est un isomorphisme.

La construction de $\mathcal{F}$ se fait de la façon suivante. Soit π_1 la projection $\mathcal{E}(G) \times X \to \mathcal{E}(G)$. Si Y est une partie G-compacte de $\mathcal{E}(G) \times X$, alors $\pi_1(Y)$ est une partie G-compacte de $\mathcal{E}(G)$. Considérons la composition

$$\mathcal{R}\mathrm{KK}_*^G(X; C_0(Y), A) \xrightarrow{f} \mathrm{KK}_*^G(C_0(Y), A) \xrightarrow{\pi_{1,*}} \mathrm{KK}_*^G(C_0(\pi_1(Y)), A), \tag{2}$$

où la premier flèche est juste l'oubli de la $C_0(X)$-structure. En passant à la limite inductive suivant les parties G-compactes Y de $\mathcal{E}(G) \times X$, on obtient un morphisme

$$\mathcal{F} : \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(X \rtimes G; A) \to \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G; A).$$

Remarque 6.2. Le morphisme d'oubli $\mathcal{F}$ est compatible avec les applications d'assemblages pour G et $X \rtimes G$.

Bien que le membre de gauche ne provienne pas d'une descente fonctorielle, on peut tout de même appliquer en partie cette technique. En particulier, l'application définie par la formule (2) est compatible avec le morphisme d'induction. Le critère de comparaison, portant auparavant sur les actions K-linéaires d'un sous-groupe compact maximal K d'un sous-groupes ouvert H de G sur un espace vectoriel réel de dimension fini, porte désormais sur l'action de H sur H/K. La conclusion de la preuve du théorème 6.1 se fait alors grâce au lemme suivant :

Lemme 6.3. *Supposons que G soit presque connexe. Alors le morphisme d'oubli*

$$\mathcal{F} : \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(X \rtimes G; A) \longrightarrow \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G; A)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Le groupe G étant presque connexe, il posséde un élément γ (au sens de [**38**]). Celui-ci induit un élément γ au sens de [**55**] sur le groupoïde $X \rtimes G$. Le morphisme d'oubli $\mathcal{F}$ est compatible avec les applications d'assemblages pour G et $X \rtimes G$ et ces deux applications son injectives, d'image la γ -partie de $\mathrm{K}_*(A \rtimes_r G)$ (voir [**55**, Proposition 5.23]). □

En conséquence, les conjecture de Baum-Connes pour G et $X \rtimes G$ sont équivalentes :

Théorème 6.4. *Soit G un groupe localement compact agissant sur un espace localement compact X et soit A une $X \rtimes G$-algèbre. Alors G vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans A si et seulement si $X \rtimes G$ vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans A.*

Ce théorème permet de donner une preuve immédiate de la conjecture de Baum-Connes pour un groupe G à coefficients dans une algèbre G-propre. Ce résultat est fondamental pour l'approche de la conjecture de Baum-Connes par la technique de l'élément γ et a été montré initialement dans [**15**]. D'après [**55**], un groupoïde propre $\mathcal{G}$ vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans toute $\mathcal{G}$ -algèbre. On obtient donc comme corollaire du théorème 6.4 :

Corollaire 6.5. *Soit G un groupe localement compact. Alors G vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans toute G-algèbre propre.*

Ce résultat peut-être étendu aux actions moyennables. En conséquence de la généralisation par Tu aux groupoïdes moyennables du théorème de Higson-Kasparov [**30**], on obtient

Corollaire 6.6. *Soit G un groupe localement compact agissant moyennablement sur un espace localement compact X et soit A une $X \rtimes G$-algèbre. Alors l'application d'assemblage de Baum-Connes*

$$\mu_{G,A} : \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}(G; A) \to \mathrm{K}_*(A \rtimes_r G)$$

est un isomorphisme.

Nous terminons cette section en donnant une application du théorème 6.4 au théorème d'imprimitivité symétrique. Soit H et L deux groupes agissant proprement et librement sur un espace localement compact X, de sorte que les actions de ces deux groupes commutent. Soit A une $X \rtimes (H \times L)$-algèbre. On dénote par A^L et A^H les algèbres des points fixes généralisés correspondant à H et L construites par Kasparov. Les trois groupoïdes $(H\backslash X) \rtimes L$, $X \rtimes (H \times L)$ et $L\backslash X \rtimes H$ sont équivalents et d'après [**17**, section4], leurs groupes de K-théorie topologique

$$\mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}\left((H\backslash X) \rtimes L; A^H\right), \quad \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}\left(X \rtimes (H \times L); A\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{K}_*^{\mathrm{top}}\left((L\backslash X) \rtimes H; A^L\right)$$

sont isomorphes. Il en résulte le théorème suivant :

Théorème 6.7. [**17**] *Avec les notations précédentes, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Le groupe H vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans A^L ;*

(2) *Le groupe L vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans A^H.*

Appliquons ce résultat, lorsque H est un sous-groupe fermé de G, à l'action de $G \times H$ sur G (à droite pour G et à gauche pour H). Pour toute H-algèbre B, considérons la $G \times H$-algèbre $A = C_0(G) \otimes B$ (l'action de $G \times H$ étant diagonale et l'action de G sur B étant triviale). On peut alors vérifier que A^G est isomorphe à B en tant que H-algèbre et A^H est par définition la G-algèbre induite $\mathrm{Ind}_H^G B$ de B à G. On obtient ainsi une preuve plus conceptuelle du résultat de [**14**, Theorem 2.5]

Corollaire 6.8. *Soit G un groupe localement compact, H un sous-groupe fermé de G. Alors H vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans la H-algèbre B si et seulement si G vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients dans $\mathrm{Ind}_H^G B$, l'algèbre induite de B à G. En particulier la conjecture de Baum-Connes à coefficients arbitraires est stable par passage à un sous-groupe fermé.*

Bibliographie

[1] C. Anantharaman-Delaroche and J. Renault. *Amenable groupoids.* Monographies de L'Enseignement Mathématique **36**, Geneva, 2000.

[2] M.F. Atiyah, *Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras.* Astérisque n^o 32–33, Soc. Math. France, Paris, 1976.

[3] P. Baum, A. Connes and N. Higson. *Classifying space for proper actions and* K*-theory of group C^*-algebras.* Contemporary Mathematics **167** (1994), pp. 241–291.

[4] P. Baum, S. Millington, and R. Plymen. *A proof of the Baum-Connes conjecture for reductive adelic groups.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **332** (2001), n^o 3, pp. 195–200.

[5] J.Bellissard. *Gap labelling theorems for Schrödinger's operators.* From number theory to physics (Les Houches 1989), pp. 538–630, Springer, Berlin, 1992.

[6] J. Bellissard, R. Benedetti and J.-M. Gambaudo, *Spaces of tilings, finite telescopic approximation and gap labelings*, Preprint.

[7] J. Bellissard, E. Contensou and A. Legrand. K*-théorie des quasicristaux, image par la trace : le cas du réseau octogonal.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **326** (1998), n^o 2, pp. 197–200.

[8] J. Bellissard, D.J.L. Herrmann, M. Zarouati. *Hulls of aperiodic solids and gap labelling theorems.* Directions in mathematical quasicristals, pp. 207–258, CRM Monogr. Ser. 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[9] J. Bellissard, J. Kellendonk and A. Legrand. *Gap-labelling for three-dimensional aperiodic solids*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **332** (2001), n^o 6, pp. 521–525.

[10] M.T. Benameur, H. Oyono-Oyono. *Index theory for quasi-crystals I. Computation of the gap-label group.* Preprint (2004).

[11] B. Blackadar. K*-theory for operator algebras.* MSRI publications **5**, Second Edition, Cambridge University Press, 1998.

[12] J. Chabert. *Baum-Connes conjecture for some semi-direct product groups.* J. reine angew. Math. **521** (2000), pp. 161–184.

[13] J. Chabert and S. Echterhoff. *Twisted equivariant* KK*-theory and the Baum-Connes conjecture for group extensions.* K-Theory **23** (2001), pp. 157–200.

[14] J. Chabert and S. Echterhoff. *Permanence properties of the Baum-Connes conjecture.* Doc. Math. **6** (2001), pp. 127–183.

[15] J. Chabert, S. Echterhoff, and Ralf Meyer. *Deux remarques sur la conjecture de Baum-Connes.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **332** (2001), n^o 7, pp. 607–610.

[16] J. Chabert, S. Echterhoff and R. Nest. *The Connes Kasparov conjecture for almost connected groups and linear p-adic groups.* Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. n^o 97 (2003), pp. 239–278.

[17] J. Chabert, S. Echterhoff and H. Oyono-Oyono. *Shapiro's lemma for topological* K*-theory of groups.* Com. Math. Helv. **78** (2003), n^o 1 , pp. 203–225.

[18] J. Chabert, S. Echterhoff and H. Oyono-Oyono. *Going-down functors, the Künneth formula and the Baum-Connes conjecture.* Geom. Funct. Anal. **14** (2004), pp. 491–528.

[19] A. Connes. *Noncommutative Geometry*, Academic Press, New York-London, 1994.

[20] A. Connes, H. Moscovici.*Cyclic cohomology, the Novikov conjecture and hyperbolic groups.* Topology **29** (1990), n^{o} 3, pp. 345–388.

[21] A. Connes and G. Skandalis. *The longitudinal index theorem for foliations.* Publ. RIMS. Kyoto Univ. **20** (1984), pp. 1139–1183.

[22] E. Contensou. *La C^*-algèbre d'une quasi-représentation.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **324** (1997), n^{o} 3, pp. 293–295.

[23] J. Dixmier. *Sur les représentations unitaires des groupes de Lie algébriques.* Ann. Inst. Fourier **7** (1957), pp. 315–328.

[24] M. Duneau and A. Katz. *Quasiperiodical pattern*, Phys. Rev. Lett. **54** (1985), pp. 2688-2691.

[25] G.A. Elliott, T. Natsume and R. Nest. *Cyclic cohomology for one-parameter smooth crossed products.* Acta Math. **160** (1988), n^{o} 3-4, pp. 285–305.

[26] E.C. Gootman and R.R. Kallman. *The left regular representation of a p-adic algebraic group is type I.* Studies in algebra and number theory, pp. 273–284, Adv. in Math. Suppl. Stud. **6**, Academic Press, 1979.

[27] P. Green. *The local structure of twisted covariance algebras.* Acta Math. **140** (1978), pp. 191–250.

[28] E. Guentner, N. Higson and S. Weinberger.*The Novikov Conjecture for Linear Groups.* Preprint (2003).

[29] N. Higson. *Bivariant K-theory and the Novikov conjecture.* Geom. Funct. Anal. **10** (2000), pp. 563–581.

[30] N. Higson and G. Kasparov. *E-theory and* KK*-theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space.* Invent. Math. **144** (2001), pp. 23–74.

[31] N. Higson, V. Lafforgue and G. Skandalis. *Counterexamples to the Baum-Connes conjecture.* Geom. Funct. Anal. **12** (2002), pp. 330–354.

[32] P. Julg *La conjecture de Baum-Connes à coefficients pour le groupe* $\mathrm{Sp}(n,1)$. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **334** (2002), n^{o} 7 , pp. 533–538.

[33] P. Julg and G. Kasparov, *Operator* K*-theory for the group* $\mathrm{SU}(n,1)$. J. Reine Angew. Math. **463** (1995), pp. 99–152.

[34] J. Kaminker and I. Putnam, *A proof of the gap labeling conjecture*, Michigan Math. J. **51** (2003), n^{o} 3, pp. 537–546 .

[35] G. Kasparov. *The operator* K*-functor and extensions of C^*-algebras.* Math. USSR Izvest. **16** (1981), pp. 513–572.

[36] G. Kasparov. K*-theory, group C^*-algebras and higher signatures* (conspectus), Part 1,2. The Institut of Chemical Physics (Preprint 1981).

[37] G. Kasparov. *L*orentz groups : K-theory of unitary representations and crossed products (Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR 275 (1984), n^{o} 3, pp. 541–545.

[38] G. Kasparov. *Equivariant* KK*-theory and the Novikov conjecture.* Invent. Math. **91** (1988), pp. 147–201.

[39] G. Kasparov and G. Skandalis. *Groups acting on buildings, operator* K*-theory, and Novikov's conjecture.* K-theory **4** (1991), pp. 303–337.

[40] V. Lafforgue.K*-théorie bivariante pour les algèbres de Banach et conjecture de Baum-Connes.* Invent. Math. 149 (2002), n^{o} 1, pp. 1–95.

[41] V. Lafforgue. Résultat non publié.

[42] M. Matthey. K*-theories, C^*-algebras and assembly maps.* Doctoral Thesis, University of Neuchâtel, Switzerland, 2000.

[43] M. Matthey and H. Oyono-Oyono. *Algebraic K-theory in low degree and the Novikov assembly map.* Proc. London Math. Soc. (3) **85** (2002), n^{o} 1 , pp. 43–61 .

[44] I. Mineyev and G. Yu, *The Baum-Connes conjecture for hyperbolic groups.* Invent. Math. **149** (2002), n^{o} 1, pp. 97–122.

[45] A.S Mishchenko. *C^*-algebras and* K*-theory.* Lect. Notes Math. **763**, pp. 513–558, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1979.

[46] R. Meyer, R. Nest *The Baum-Connes Conjecture via Localization of Categories*. Preprint.

[47] D. Montgomery and L. Zippin. *Topological transformation groups*. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, New York, Interscience Publishers, Inc. XI, 1955.

[48] C. C. Moore and C. Schochet. *Global analysis on foliated spaces*. Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1988.

[49] T. Natsume. *The Baum-Connes conjecture, the commutator theorem, and Rieffel projections*. C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **10** (1988), n^o 1, pp. 13–18.

[50] H.Oyono-Oyono. *Baum-Connes Conjecture and group actions on trees*. K-Theory **24** (2001), pp. 115–134.

[51] H. Oyono-Oyono. *Baum-Connes conjecture and extensions*. J. reine angew. Math. **532** (2001), pp. 133–149.

[52] M. Pimsner and D. Voiculescu. *Exact sequences for* K*-groups and* Ext*-groups of certain cross-product C^*-algebras*. J. Operator Theory **4** (1980), n^o 1, pp. 93–118.

[53] C. Schochet. *Topological methods for C^*-algebras II : Geometric resolutions and the Künneth formula*. Pacific J. Math. **98** (1982), pp. 443–458.

[54] G. Skandalis. *Exact sequences for the Kasparov groups of graded algebras*. Canad. J. Math. **37** (1985), pp. 193–216.

[55] J.L. Tu. *La conjecture de Baum-Connes pour les feuilletages moyennables*. K-theory **17** (1999), pp. 215-264.

[56] A. Valette, *Introduction to the Baum-Connes Conjecture*, Lecture in Mathematics, Birkhauser, 2002.

[57] A. van Elst. *Gap labelling for Schrödinger operators on the square and cubic lattices*. Rev. Math. Phys. **6** (1994), pp. 319-342.

Références des publications présentées

(1) *Baum-Connes conjecture and group extensions*. Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik **532** (2001), pp. 133–149 ;

(2) *Algebraic K-theory in low degree and the Novikov assembly map* (en collaboration avec M. Matthey). Proceedings of the London Mathematical Society (3) **85** (2002), n$^{\text{o}}$ 1, pp. 43–61 ;

(3) *Comparison of the product structures in algebraic and topological K-theory* (en collaboration avec M. Matthey), Bulletin of the Belgium Mathematical Society. **10** (2003), n$^{\text{o}}$ 4, pp. 535–545 ;

(4) *Shapiro's lemma for topological K-theory of groups* (en collaboration avec J. Chabert et S. Echterhoff). Commentarii Mathematici Helvetici **78** (2003), n$^{\text{o}}$ 1 ,pp. 203–225 ;

(5) *Going-Down functors, the Künneth formula, and the Baum-Connes conjecture* (en collaboration avec J. Chabert et S. Echterhoff). GAFA **14** (2004), pp. 491–528.

(6) *Index theory for quasi-crystals I. Computation of the gap-label group*, à paraître au Journal of Functional Analysis.