

**Examen du 17 janvier 2008**

*Durée 1h. Les calculatrices sont autorisées. Le seul document autorisé est un formulaire manuscrit format A4 recto-verso. Les exercices sont indépendants. Justifier les réponses données. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.*

**Exercice 1. [4 pts]** \_\_\_\_\_

Selon le modèle de croissance proposé par Verhulst vers 1840, la taille  $y(t)$  d'une population augmente en fonction du temps  $t$  selon la formule

$$y(t) = M \frac{e^{\alpha+\beta t}}{1 + e^{\alpha+\beta t}},$$

où  $M$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes strictement positives fixées.

Calculer la valeur moyenne de la taille de la population sur les premières 10 unités de temps selon les prévisions du modèle.

[ *Indication* : La valeur moyenne d'une fonction  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$  est donnée par  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$ .]

**Exercice 2. [5 pts]** \_\_\_\_\_

Soit  $z = a + bi$ , avec  $a, b \in \mathbb{R}$ , et soit  $w = \frac{z}{1-i}$ .

- (a) [2 pt] Déterminer la partie réelle  $\operatorname{Re} w$  et la partie imaginaire  $\operatorname{Im} w$  de  $w$  en fonction de  $a$  et  $b$ .
- (b) [2 pt] Quelle relation doit lier  $a$  et  $b$  afin que  $w^2$  soit un nombre réel ?
- (c) [1 pt] Déterminer  $z$  tel que  $\operatorname{Re} w = 4$  et  $w^2 \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 3. [5 pts]** \_\_\_\_\_

En utilisant la méthode de Gauss, résoudre le système d'équations linéaires d'inconnues  $x$ , et  $z$  ci-dessous suivant les valeurs du paramètres réel  $\alpha$  :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y - z = \alpha \\ x + \alpha y + \alpha z = 1 \end{cases}$$

**Exercice 4. [6 pts]** \_\_\_\_\_

Un étude de la reponse immunologique chez les lapins a aboutit à une classification en trois groupes de réactions différentes. D'une semaine à l'autre, les probabilités que les lapins changent de groupe sont données par la matrice des probabilités de transition suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

- (a) [1 pt] Tracer le diagramme des probabilités de transition.
- (b) [3 pt] Combien de lapins attendons nous d'avoir à la deuxième semaine, si dans la première semaine il y avait 300 lapins dans le premier groupe, 100 lapins dans le deuxième, et aucun lapin dans le troisième groupe ? Et à la troisième semaine ?
- (c) [2 pt] A cause d'une erreur de transcription, un laboratoire a perdu les données sur la repartition de ses lapins à la première semaine. Au cours de la deuxième semaine, les données sont : 30 lapins dans le premier groupe, 50 dans le deuxième et 100 dans le troisième. Est-ce qu'on peut en déduire la repartition perdue ?