Analyse et calcul différentiel
Examen
Corrigé

Université De Metz

2006-2007

1 Premier exercice

C'est une application directe du cours. Il suffit de connaître le cours et de faire les calculs soigneusement.
On considère la fonction, définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles

$$f(x_1, x_2) = x_1^2\, x_2^2\, e^{-x_1^2-x_2^2}$$

1.1 [1 point]

Donnez la matrice Jacobienne J de f. La matrice Jacobienne est donnée par la définition 1.2 du cours. C'est une matrice 1×2

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= 2\, x_1\, x_2^2\, e^{-x_1^2-x_2^2} - (2x_1)\, x_1^2\, x_2^2\, e^{-x_1^2-x_2^2} \\ &= 2\, x_1\, x_2^2\, (1 - x_1^2)\, e^{-x_1^2-x_2^2} \end{aligned}$$

La fonction f est symétrique en x_1,x_2 par conséquent pour obtenir $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ il suffit d'échanger x_1 et x_2 dans la formule précédente :

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2\, x_1^2\, x_2\, (1 - x_2^2)\, e^{-x_1^2-x_2^2}$$

1.2 [1 point]

Le gradient de f est la transposée de J

1.3 [1 point]

Pour déterminez les points critiques de f, on doit résoudre

$$\begin{cases} 2\,x_1\,x_2^2\,(1-x_1^2)\,e^{-x_1^2-x_2^2} & =0 \\ 2\,x_1^2\,x_2\,(1-x_2^2)\,e^{-x_1^2-x_2^2} & =0 \end{cases}$$

Mais $e^{-x_1^2-x_2^2} > 0$ on doit donc satisfaire

$$\begin{cases} 2\,x_1\,x_2^2\,(1-x_1^2) & =0 \\ 2\,x_1^2\,x_2\,(1-x_2^2) & =0 \end{cases}$$

Ce qui donne $x_1 = 0$ (les deux équations sont satisfaites), ou $x_2 = 0$ (idem), ou ($x_1 = \pm 1$ et $x_2 = \pm 1$).
Les points critiques sont l'axe des x_1, l'axe des x_2 et les quatre points $(1,1)$, $(1,-1)$,$(-1,1)$ et $(-1,-1)$

1.4 [3 points]

La fonction f est nulle sur les axes de coordonnées. Comme $f \geq 0$ on a bien l'ensemble des minima. Ils sont globaux.
Il reste à regarder les quatre points. On a

$$\begin{aligned} r(x_1,x_2) &= 2x_2^2\,(1-3\,x_1^2)\,e^{-x_1^2-x_2^2} - (2\,x_1)\,2\,x_1\,x_2^2\,(1-x_1^2)\,e^{-x_1^2-x_2^2} \\ &= 2x_2^2\,(1-3\,x_1^2)\,e^{-x_1^2-x_2^2} - 2\,x_1\,\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) \end{aligned}$$

En échangeant x_1 et x_2 on a

$$t(x_1,x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) = 2x_1^2\,(1-3\,x_2^2)\,e^{-x_1^2-x_2^2} - 2\,x_2\,\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)$$

Puis

$$s(x_1,x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1,x_2) = 4\,x_1\,x_2\,(1-x_1^2)\,e^{-x_1^2-x_2^2} - 2\,x_2\,\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)$$

Si maintenant on remplace x_1 et x_2 par ± 1 en tenant compte que les dérivées partielles premières s'annulent pour ces valeurs, on obtient

$$r(\pm 1,\pm 1) = s(\pm 1,\pm 1) = -4\,e^{-2} < 0 \qquad s = 0$$

soit $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, les quatre points sont des maximum locaux.
Ce sont les seuls points critiques. Quand $\|(x_1,x_2)\|_2 \to +\infty$ f tend vers 0. En effet comme $x_1^2\,x_2^2 \leq x_1^2 + x_2^2$

$$f(x_1,x_2) \leq \|(x_1,x_2)\|_2^2\,e^{-\|(x_1,x_2)\|_2^2}$$

L'exponentielle l'emportant sur les polynnômes, on sait que $u^2\, e^{u^2} \to +\infty$ quand $u \to +\infty$.
Donc il existe R tel que si $\|(x_1, x_2)\|_2^2 \geq R^2$ on aura $f \leq \frac{1}{2}\, e^{-2}$. Autrement dit en dehors de la boule ouverte de centre l'origine et de rayon R, f est inférieur aux maxima locaux. Sur le compact la boule fermée de rayon R, f est continue, elle atteints ses extrema. Ceux-ci ne peuvent être sur le cercle puisque sur celui-ci $f \leq e^{-2}$. Donc les extrema sont atteints sur le boule ouverte. Ce sont donc des points critiques. On a vu que les 4 points sont ces extrema. Comme f est inférieur à ces valeurs sur l'extérieur de la boule, ce sont des extrema globaux.

2 Deuxième Exercice

Cet exercice est un exercice standard. De nombreux exemples ont été donné en TD.
Soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ f(x,y) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.1 2 points

Montrer que si $(x, y) \neq (0, 0)$ alors

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$$

On a de façon évidente pour tout couple (x, y) la relation $x^2 \leq x^2 + y^2$. Si $(x, y) \neq (0, 0)$ on a alors $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$, on en déduit immédiatement

$$\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$$

ce qui entraîne la relation demandée. On note que l'on une relation analogue
$\dfrac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$
Pour voir si f est dérivable en l'origine on calcule $f(x, y) - f(0, 0) = f(x, y)$. On a, en servant des deux inégalités précédentes

$$|f(x,y)| \leq |x^2 - y^2| \leq x^2 + y^2 = \|(x,y)\|_2^2$$

avec les notations du cours cela veut dire que $f(x, y) - f(0, 0) = o\,(\|(x, y)\|_2)$.
Cela signifie que l'on peut écrire

$$f(x,y) = f(0,0) + o\,(\|(x,y)\|_2)$$

f est dérivable en l'origine et sa dérivée est l'application linéaire nulle.

2.2 [1 point]

Montrer que f ainsi que ses dérivées partielles sont continues dans $\mathbb{R}^2$.

Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la fonction est un quotient de deux polynômes, dont le dénominateur ne s'annule pas. Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ f est donc dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^2$).
Comme f est dérivable à l'origine et de dérivée nulle, il suffit de montrer que les dérivées partielles de f convergent vers 0 quand $(x,y) \to (0,0)$ en restant différent de $(0,0)$.
Un calcul simple montre que, pour $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\left[y(x^2-y^2) + 2\,x^2\,y\right](x^2+y^2) - x\,y\,(x^2-y^2)\,2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)} + \frac{4\,x^2\,y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

Si on échange x et y, $f(x,y)$ est changé en $-f(x,y)$. Donc pour obtenir la dérivée partielle par rapport à y il suffit d' échanger x et y dans la formule précédente et de changer de signe

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)} - \frac{4\,x^3\,y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

En utilisant les inégalités de la première question et $|x^2 - y^2| \leq x^2 + y^2$ on obtient

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq |y| + 4\,|y|$$

et

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq |x| + 4\,|x|$$

Ce qui prouve que les limites des dérivées partielles, quand (x,y) tend vers l'origine en étant distincte de l'origine, est 0.
f étant dérivable partout est aussi continue.

2.3 [1 point]

Montrer que les dérivées partielles d'ordre 2 existent en chaque point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la fonction est un quotient de deux polynômes, dont le dénominateur ne s'annule pas. Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ f est donc dérivable deux fois et ses dérivées partielles sont continues.

2.4 [2 points]

Si $y \neq 0$ alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \frac{-y^3}{y^2} = -y$$

Si $x \neq 0$ alors

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \frac{x^3}{x^2} = x$$

On en déduit immédiatement que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)\right) = -1$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)\right) = 1$$

D'après la définition des dérivées partielles d'ordre 2, et d'après le cours

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)\right) = 1$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)\right) = -1$$

2.5 1 point

Pourquoi ce dernier résultat n'est-il pas en contradiction avec le théorème de Schwarz ?
Pour que le théorème de Schwarz s'applique il faut que les dérivées partielles d'ordre 2 soient continues. Cela signifie donc que les dérivées partielles d'ordre 2 ne sont pas continues **en l'origine** . Il n' y a pas de contradiction

3 Troisième Exercice

Cet exercice utilise le même principe que la question 2.1. C'est la caractérisation d'une application différentiable en un point. Cet exercice est un cadeau.
Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$.
Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout couple $(x,y) \in \Omega^2$ on ait

$$|f(x) - f(y)| \leq \|x-y\|^2$$

Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ [2 points]

D'après l'inégalité on a

$$f(x) - f(x_0) = o\,(\|x - x_0)$$

Cela signifie que f est dérivable en tout point de l'ouvert $Omega$ et que sa dérivée est nulle. On répond aux deux questions d'un coup et cela rpporte 3 points.
Montrer que f est constante sur Ω [1point]
Puisque l'on est sur un ouvert convexe, que f est dérivable, que la norme de sa dérivée est majorée par 0, on applique le théorème des accroissements finis

$$|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|$$

Ce qui prouve que $f(x) = f(y)$ pour tout couple de points de Ω.

4 Quatrième Exercice[3 points]

Cet exercice est aussi un cadeau. Les composantes de f sont très simples
On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \left(x^2\,y, x^2 + y^2\right)$$

Si on pose $f_1(x,y) = x^2\,y$ et $f_2(x,y) = x^2 + y^2$
La matrice Jacobienne de f est (voir le cours)

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}$$

Soit

$$J = \begin{bmatrix} 2\,x\,y & x^2 \\ 2\,x & 2\,y \end{bmatrix}$$