François Murat

Laboratoire Jacques-Louis Lions
Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)

Titre :

Estimation a priori et existence pour des problèmes elliptiques
avec des perturbations sous quadratiques par rappport au gradient

Résumé :

Dans cet exposé, je considérerai le problème modèle

$$u \in H_0^1(\Omega), \qquad -\mathrm{div}\, A(x)Du + \alpha_0 u = \gamma |Du|^q + f(x) \ \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

où A est une matrice coercive à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$, $\alpha_0 \geq 0$, $0 \leq q \leq 2$ et $f \in L^m(\Omega)$ pour un m convenable. Il s'agit là d'un problème modèle, susceptible de nombre de variantes. En particulier, je considérerai le cas ou le second membre est contrôlé par (sans être nécessairement égal à) $\gamma|Du|^q + f(x)$.

Dans le cas où $0 \leq q < 1$, l'existence est classique pour $f \in H^{-1}(\Omega)$. Le cas où $q = 1$ et $f \in H^{-1}(\Omega)$ présente déjà une difficulté notable quand γ est grand ; il a été résolu par G. Bottaro et M.E. Marina en 1973. Le cas où $q = 2$ a été étudié en particulier par L. Boccardo, J.-P. Puel et moi même dans une série d'articles où nous avons démontré l'existence d'une solution $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ (et une estimation a priori dans ces espaces) quand $\alpha_0 > 0$ et $f \in L^m(\Omega)$ pour $m > N/2$; V. Ferone et moi même avons ensuite démontré l'existence d'une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ avec $\exp(\gamma u) - 1 \in H_0^1(\Omega)$ (et une estimation a priori dans ces espaces) quand $\alpha_0 = 0$ et $f \in L^{N/2}(\Omega)$ avec f assez petit dans $L^{N/2}(\Omega)$; le cas $\alpha_0 = 0$ et $f \in L^{N/2}(\Omega)$ quelconque a été traité par A. Dall'Aglio, D. Giachetti et J.-P. Puel.

Dans cet exposé, je présenterai surtout des résultats obtenus en collaboration avec N. Grenon et A. Porretta qui ont été annoncés dans C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 342, (2006), pp. 23-28 : quand $1+2/N \leq q < 2$ et $f \in L^m(\Omega)$ avec $m = N(q-1)/q$ (nous traitons aussi le cas où $1 \leq q < 1 + 2/N$ mais je ne le discuterai pas car il nécessite de faire appel à la notion de solution renormalisée), et quand $\alpha_0 > 0$ ou bien quand f est assez petit dans $L^m(\Omega)$, nous démontrons l'existence d'une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ avec $|u|^\sigma \in H_0^1(\Omega)$ pour $\sigma = (N-2)(q-1)/2(2-q)$. Nous obtenons de plus une estimation a priori pour toute solution du problème qui appartient à cette classe. L'intérêt principal de notre résultat réside dans cette estimation a priori, dont la démonstration est non standard.