

Existence et stabilité exponentielle pour une équation des ondes amorties comportant des conditions aux limites dynamiques et un terme de retard.

STÉPHANE GERBI

Laboratoire de Mathématiques, UMR 5127 CNRS et Université de Savoie,
73376 Le Bourget du Lac, France

<http://lama.univ-savoie.fr/~gerbi>
stephane.gerbi@univ-savoie.fr

Dans cet exposé, nous considérons une équation des ondes amorties avec des conditions aux limites dynamiques et un terme de retard :

$$\begin{aligned}
 u_{tt} - \Delta u - \alpha \Delta u_t &= 0, & x \in \Omega, t > 0, \\
 u(x, t) &= 0, & x \in \Gamma_0, t > 0, \\
 u_{tt}(x, t) &= - \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) + \frac{\alpha \partial u_t}{\partial \nu}(x, t) + \mu_1 u_t(x, t) + \mu_2 u_t(x, t - \tau) \right) & x \in \Gamma_1, t > 0, \\
 u(x, 0) &= u_0(x) & x \in \Omega, \\
 u_t(x, 0) &= u_1(x) & x \in \Omega, \\
 u_t(x, t - \tau) &= f_0(x, t - \tau) & x \in \Gamma_1, t \in (0, \tau),
 \end{aligned} \tag{1}$$

où $u = u(x, t)$, $t \geq 0$, $x \in \Omega$ est un domaine régulier borné de \mathbb{R}^N , ($N \geq 1$), $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $mes(\Gamma_0) > 0$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$, $\alpha, \mu_1, \mu_2 > 0$ et u_0, u_1, f_0 sont des fonctions données. De plus, $\tau > 0$ représente le temps de retard.

Nous examinerons deux aspects de ce problème :

1. l'existence, l'unicité et l'existence globale?
2. la solution stationnaire $u = 0$ est-elle stable? A-t-on une décroissance exponentielle?

Nous examinerons les deux cas suivants :

1. $\mu_2 < \mu_1$ et $\alpha \geq 0$,
2. $\mu_2 \geq \mu_1$ et $\alpha > \frac{\mu_2^2 - \mu_1^2}{2\mu_1 B} > 0$ (B une constante liée à la première valeur propre du laplacien avec des conditions mixtes Dirichlet-Robin).

Nous répondrons à ces deux questions dans les deux cas en utilisant la théorie des semi-groupes et le théorème de Hille-Yosida pour l'existence et par l'utilisation d'une fonction de Lyapunov appropriée pour l'étude du comportement asymptotique.

Ce travail est un travail commun avec BELKACEM SAID-HOUARI, King Abdullah University of Science and Technology, KAUST, Saudi Arabia.